Необходимая граница площади прямоугольника для упаковки в него пяти и произвольного конечного, большего пяти, числа квадратов общей площадью единица

Н.Л. Казанский[а,б], М.Г. Кузнецов[в]

[а] *Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия*

[б] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия*

[в] *ООО "Локус", Территория Инновационного Фонда "Сколково", 143026, ул. Малевича, 1, Москва, Россия*

Аннотация

В данной работе показывается, что любая наперёд заданная система из конечного числа (большего или равного пяти) квадратов общей площадью единица с необходимостью упаковывается без вращений в прямоугольник площадью $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3$.

Ключевые слова: упаковка квадратов; прямоугольник площадью один; без вращения; необходимое условие, граница площади; доказательство теорем; комбинаторные методы.

1. Введение

В 1966 году L.Moser [1] сформулировал следующий вопрос: Каково наименьшее число **S**, для которого любая система квадратов общей площадью 1 (единица) может быть (параллельно) упакована в прямоугольник площадью **S**? Эта проблема также отмечена в работе W.Moser & J.Pach [2]. J.W.Moon & L.Moser [3] получили первые верхние пределы для данной задачи. Они показали, что любая система квадратов с общей площадью **1** может быть упакована в квадрат площадью $\mathbf{S_u} = \mathbf{2}$. Также в этой работе они нашли первые значения для нижней границы площади прямоугольника $\mathbf{S_d} = 1{,}2$. Следующие результаты для упаковки квадратов суммарной площадью **1** в прямоугольник опубликованы D.Kleitman & M.Krieger [4], которые доказали достаточность прямоугольника площади $\mathbf{S_u} = 3^{1/2}$ для упаковки вышеуказанной системы квадратов. Они же в работе [5] снизили достаточность площади прямоугольника до $\mathbf{S_u} = (8/3)^{1/2} = 1{,}633$ P.Novotný в работе [6] первым показал для системы из трёх квадратов необходимость площади прямоугольника $\mathbf{S_3} = 1{,}227759$ (эта площадь необходима для упаковки квадратов со сторонами 0,7297177; 0,5588698 и 0,3939246) и необходимость для системы из четырёх квадратов площади прямоугольника $\mathbf{S_4} = \mathbf{S_d} = 1{,}2440169... = (2 + 3^{1/2})/3$. В работе [7] он же доказал достаточность для любого числа квадратов $\mathbf{S_u} < 1.53...$ В дальнейшем в статье [9] S.Hougardy снизил достаточность для упаковки любых систем квадратов до $\mathbf{S_u} < 1{,}39990... = 2867/2048$. В публикации [8] P.Novotný показал для систем из четырёх и пяти квадратов достаточности площадей прямоугольников $\mathbf{S_4} = \mathbf{S_5} = \mathbf{S_u} = 1{,}2440169... = (2 + 3^{1/2})/3$. Целью настоящей статьи является доказательство комбинаторными методами необходимости $\mathbf{S_5} = \mathbf{S_d} = 1{,}2440169... = (2 + 3^{1/2})/3$, а также необходимости этого же предела для систем из любого заданного конечного числа квадратов. Все математические действия ведутся в пространстве $\mathbf{R_2}$.

Теорема 1. Любая система из пяти квадратов общей площадью **1** с необходимостью упаковывается без вращений в прямоугольник площадью $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3 = 1{,}2440169...$

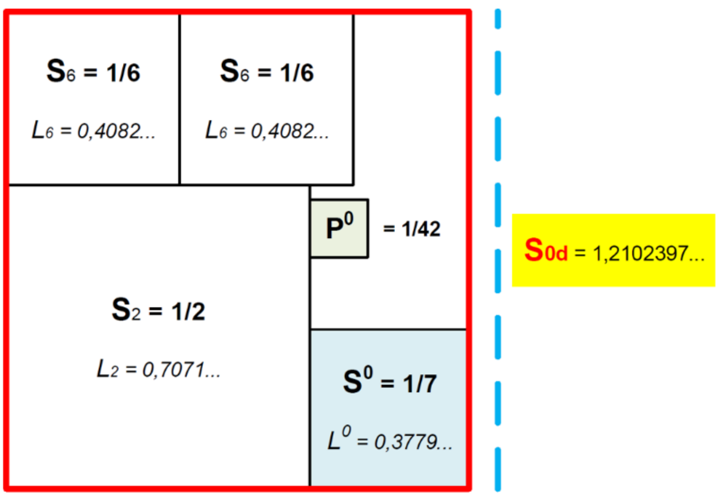

Рис. 1. Исходное расположение квадратов в прямоугольнике для доказательства **теоремы 1**. Индексированные **S**, **P** и L обозначают площади и длины сторон соответствующих квадратов и прямоугольника.

Авторы считают, что данный результат является наилучшим для системы из пяти квадратов с площадями, выраженными аликвотными дробями. Для доказательства теоремы возьмём систему из пяти квадратов с площадями 1/2, 1/6, 1/6, 1/7 и 1/42. Легко видеть, что наименьший прямоугольник, в который возможно упаковать данную систему квадратов, показан на рис. 1 и имеет площадь $\mathbf{S_{0d}} = ((1/2)^{1/2} + (1/6)^{1/2}) \times ((1/2)^{1/2} + (1/7)^{1/2}) = 1{,}2102397...$ Пунктирная линия показывает границу прямоугольника площадью $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3 = 1{,}2440169...$, к которой мы будем стремиться в ходе дальнейших рассуждений. Начнём увеличивать площадь большого выделенного квадрата по следующему алгоритму: $\mathbf{S^0} = 1/7$, $\mathbf{S^k} = (1 + k)/(7 + 6k)$, $k \in N$. При этом у маленького выделенного квадрата площадь будет уменьшаться таким образом: $\mathbf{P^0} = 1/42$, $\mathbf{P^k} = 1/(42 + 36k)$, $k \in N$.

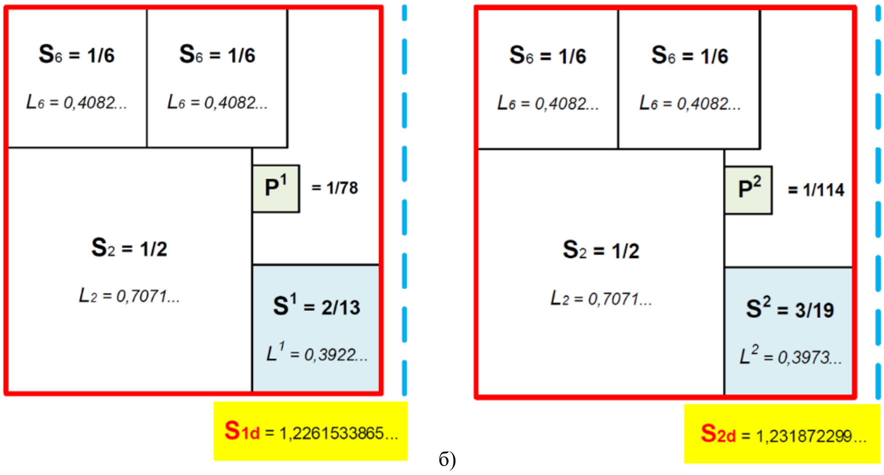

Рис. 2. Шаги доказательства теоремы 1 при k = 1 (а) и k = 2 (б).

Понятно, что $\lim \mathbf{S^k} = 1/6$, $\lim \mathbf{P^k} = 0$ и для любого $\in > 0$ и прямоугольника с площадью $\mathbf{S^{kd}} = ((1/2)^{1/2} + (1/6)^{1/2}) \times ((1/2)^{1/2} + (1/6)^{1/2}) - \in$ мы сможем построить систему из пяти квадратов, для упаковки которой в прямоугольник потребуется бóльшая площадь, необходимый предел которой равен $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3 = 1{,}2440169...$ **Теорема доказана**. Таким образом, доказанная теорема вместе с результатом P. Novotný [8] показывает, что для упаковки любой системы из пяти квадратов общей площадью **1** в прямоугольник необходимо и достаточно площади прямоугольника $\mathbf{S_d} = \mathbf{S_u} = (2 + 3^{1/2})/3$.

Теорема 2. Любая наперёд заданная система из конечного, большего пяти, числа квадратов общей площадью **1** с необходимостью упаковывается без вращений в прямоугольник площадью $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3$. Для доказательства этого факта воспользуемся результатом, полученным S.Hougardy в статье [9] о достаточности для упаковки любых систем квадратов площадью **S** прямоугольника площадью $\mathbf{S_u} < \mathbf{S} \times 1{,}39990...$

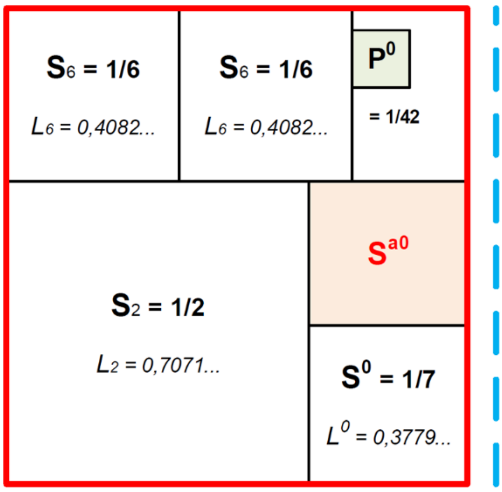

Рис. 3. Исходное расположение квадратов в прямоугольнике для доказательства теоремы 2. Индексированные S, P и L обозначают площади и длины сторон соответствующих квадратов и прямоугольника.

Площадь выделенного прямоугольника $\mathbf{S^{a0}}$ в соответствии с алгоритмом, применённым при доказательстве **теоремы 1**, монотонно убывает от $\mathbf{S^{ao}} = ((1/2)^{1/2} - (1/7)^{1/2}) \times (1/7)^{1/2} = 0{,}12440...$ до $\mathbf{S^a} = ((1/2)^{1/2} - (1/6)^{1/2}) \times (1/6)^{1/2} = 0{,}1220...$, что заведомо более чем в пять раз превышает площадь **Pi** стремящегося к нулю «довеска» и при разбиении последнего на любое конечное число частей, эти части в соответствии с результатами S.Hougardy [9] свободно укладываются в прямоугольник площадью $\mathbf{Sd} = (2 + 3^{1/2})/3$. **Теорема доказана**.

Таким образом, **теорема 2** показывает, что необходимый предел для площади прямоугольника при упаковке в него пяти квадратов $\mathbf{Sd} = (2 + 3^{1/2})/3$, доказанный в **теореме 1**, совпадает с пределом для упаковки в прямоугольник любой, большей пяти, конечной системы квадратов общей площадью **1**.

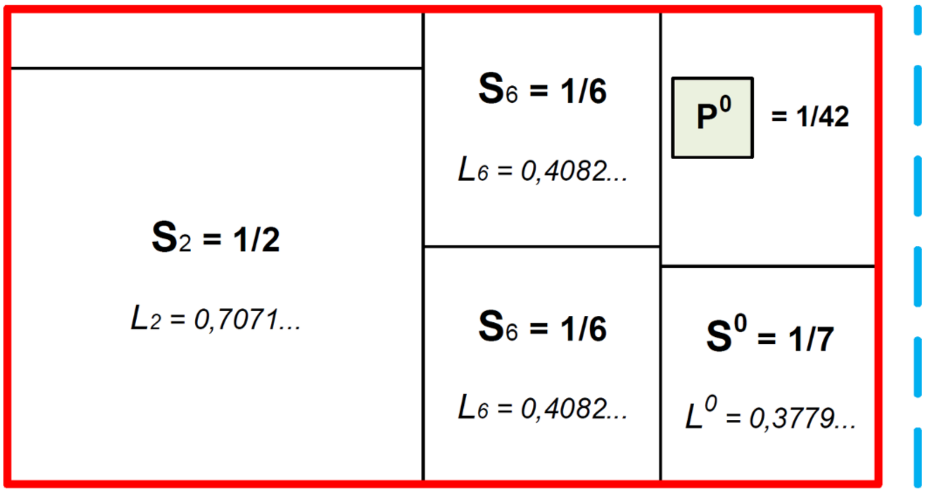

Рис. 4. Дополнительная форма прямоугольника с другим исходным расположением квадратов для доказательства теорем 1 и 2. Индексированные S, P и L обозначают площади и длины сторон соответствующих квадратов.

Аналогичные доказательства **теорем 1** и **2** существуют и в случае первоначального расположения квадратов как показано на рис. 4. Только в этом случае предельным будет не квадрат со сторонами $(1/2)^{1/2} + (1/6)^{1/2}$, а прямоугольник со сторонами $2\times(1/6)^{1/2}$ и $(1/2)^{1/2} + 2\times(1/6)^{1/2}$ и такой же площадью $\mathbf{S_d} = (2 + 3^{1/2})/3$.

2. Заключение

Результаты настоящей работы могут быть применены при анализе шероховатости поверхностей, характеристик сигналов при их свёртке и передаче, а также для количественной оценки микроструктуры металлов при их обработке и дальнейшем использовании etc.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России. Авторы благодарны д.т.н. А.И. Хаймовичу за поддержку и полезные обсуждения.

Литература

[1] Moser, L. Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry / L. Moser – Mimeographed, 1966.
[2] Moser, W. Research Problems in Discrete Geometry / W. Moser, J. Pach. – McGill University, Montreal, 1989. Problem No. 108.
[3] Moon, J.W. Some packing and covering theorems / J.W. Moon, L. Moser// Colloquium Mathematicum. – 1967. – Vol. 17(1). – P. 103-110,
[4] Kleitman, D. Packing squares in rectangles I / D. Kleitman, M. Krieger // Annals of the New York Academy of Sciences. – 1970. – Vol. 175. – P. 253-262.
[5] Kleitman, D. An optimal bound for two dimensional bin packing / D. Kleitman, M. Krieger // In 16-th Annual Symposium of Foundations of Computer Science. Berkeley, IEEE Computer Society, Long Beach, California. – 1975. – P. 163-168.
[6] Novotný, P. A note on a packing of squares / P. Novotný // Studies of University of Transport and Communications in Žilina, Math.-Phys. Series. – 1995. – Vol. 10. – P. 35-39.
[7] Novotný, P. On packing of squares into a rectangle / P. Novotný // Archivium Mathematicum (Brno). – 1996. – Vol. 32. – P. 75-83.
[8] Novotný, P. On packing of four and five squares into a rectangle / P. Novotný // Note di Matematica. – 1999. – Vol. 19(2). – P. 199-206.
[9] Hougardy, S. On packing squares into a rectangle / S. Hougardy // Computational Geometry. – 2011. – Vol. 44(8). – P. 456-463.