

# Нелинейная динамика прямоугольных в плане наноболочек

В.А. Крысько мл<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Политехническая 77, Саратов, Россия, 410054

**Аннотация.** В работе построена математическая модель нелинейных колебаний прямоугольных в плане нано оболочек под действием поперечной знакопеременной нагрузки. В основу математической модели положены следующие гипотезы: оболочка пологая, упругая, изотропная, геометрическая нелинейность учитывается по теории Т. фон Кармана, кинематическая гипотеза Кирхгофа-Лява. Из энергетического принципа Гамильтона на основе модифицированной моментной теории упругости построена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в смешанной форме восьмого порядка. Система уравнений сводится к задаче Коши методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка точности. Задача Коши решается методами типа Рунге-Кутты четвертого порядка. Исследуется сходимость этих решений в зависимости от шага интегрирования по временной и пространственной координатам. Выявлено, что учет наноэффектов приводит к увеличению зон гармонических колебаний и появлению кроме хаотических колебаний гиперхаотических. Переход колебаний из гармонических в хаотические происходит по сценарию Фейгенбауман. Характер колебаний выявляется с помощью анализа знака спектра Ляпуновских показателей. Гиперхаотические колебания характеризуются двумя положительными значениями Ляпуновских показателей, а хаотических колебания одним положительным Ляпуновским показателем. Для наноболочек это явление выявлено впервые. Спектр Ляпуновских показателей определяется по методам Вольфа, Канца, Розенштайна и Саваада для получения достоверных результатов.

## 1. Введение

Микро- и нано электромеханические системы (МЭМС и НЭМС) относятся к наиболее перспективным изделиям современной промышленности и приборостроения. Проведение фундаментальных исследований необходимо для повышения надежности и точности работы чувствительных элементов, которыми являются оболочки. Исследования нелинейной динамики МЭМС и НЭМС показали, что возникновение хаотических колебаний чувствительного элемента может привести к нестабильной работе приборов любого типа (в нефтегазовой промышленности, машиностроении, приборостроении, робототехнике, мехатронике и медицине, например, атомно-силовые микроскопы [1-3], микроприводы [4], датчики [5], твердотельные гироскопы и т. д). В качестве одного из первых исследований по изучению наноэффекта в задачах механики следует считать Wang Y.C.[6], который представил теоретический анализ и экспериментальные результаты по динамическому поведению

бистабильного резонатора микро электромеханической системы и продемонстрировал существование странного аттрактора и хаоса. В работе Рени [7] указывается на то, что за хаотические колебания можно ошибочно принять погрешность метода при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных численными методами, причем, если это решение получено одним методом и в небольших приближениях. В работе [8] на это замечание была предложена методология определения истинности хаотических колебаний при изучении круглых в плане сферических осесимметричных оболочек. Известно, что при толщине оболочек порядка микрона и субмикрона механическое поведение и деформационные характеристики зависят от размера [9, 10]. Поэтому влияние размера должно приниматься во внимание при анализе механического поведения наноструктур. Исследованию механических нано структур были посвящены работы [11,12] Большинство работ посвященные изучению хаотических колебаний как в макро так и в микро размерных структурах рассматривают только явление хаотических колебаний, в то время когда в ряде исследований было выявлено, что кроме хаотических колебаний существуют еще и гиперхаотические [13] колебания, а так же колебания других типов. В настоящая работа ставит своей целью получить “истинные” колебания хаотической динамики наноразмерных пологих оболочек и выявить новые явления типа гиперхаоса в указанных оболочных структурах.

## 2. Математическая модель пологой наноболочки

Рассмотрим пологую, (пологость формулируется по теории В.З. Власова [14]) прямоугольную в плане наноболочку. В основу математической модели положены следующие гипотезы: оболочка упругая, изотропная, геометрическая нелинейность учитывается по теории Т. фон Кармана, используется кинематическая гипотеза Кирхгофа-Лява.

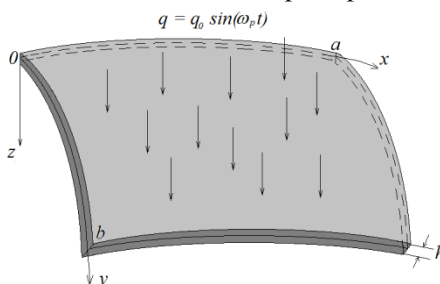


Рисунок 1. Расчетная модель.

Из энергетического принципа Гамильтона на основе модифицированной моментной теории упругости построена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в смешанной форме восьмого порядка.

$$\left( \frac{E h^3 (1 - \nu)}{12 (1 + \nu) (1 - 2\nu)} + \frac{l^2 E h}{2 (1 + \nu)} \right) \nabla^4 w + \nabla_k^2 F - h L (w, F) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} - q (x, y, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E h} \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L (w, w) = 0;$$

где,  $L (w, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$ ;  $\nabla_x^2 ( ) = k_x \frac{\partial^2 ( )}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 ( )}{\partial x^2}$ ;  $k_x = \frac{1}{R_x}$ ;  $k_y = \frac{1}{R_y}$  .

Граничные условия: опирание на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) в касательной плоскости ребра:

$$w = 0; (\partial_x w) / (\partial x^2) = 0; F = 0; (\partial_x F) / (\partial x^2) = 0 \text{ при } x = 0; a \quad (2)$$

$$w = 0; (\partial_y w) / (\partial y^2) = 0; F = 0; (\partial_y F) / (\partial y^2) = 0 \text{ при } y = 0; b.$$

Начальные условия

$$w (x, y) |_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} |_{t=0} = 0; \quad (3)$$

Для численного решения системы (1-3) приведены к безразмерному виду следующим образом:

$\lambda_1 = \frac{a}{b}$  - геометрический параметр;  $\gamma = \frac{l}{h}$  - размерно-зависимый параметр;

$x = a\bar{x}$ ,  $y = b\bar{y}$ ;  $w = h\bar{w}$ ; - прогиб;  $F = E h^3 \bar{F}$  - функция усилий;  $t = \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{\gamma_1}{gE}} \bar{t}$  - время;  $q = \frac{E h^4}{a^2 b^2} \bar{q}$  -

внешнее давление;  $\varepsilon = \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{gE}{\gamma}} \bar{\varepsilon}$  - коэффициент демпфирования среды,  $h$  - толщина оболочки,

$a, b$  - размеры оболочки в плане,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $E$  - модуль упругости материала,  $g$  - ускорение свободного падения,  $l$  - характерный размер оболочки,  $\gamma_1$  - объемный вес материала,  $R_x, R_y$  - радиусы оболочек,  $k_x = \frac{a^2}{h R_x}$ ;  $k_y = \frac{b^2}{h R_y}$  - безразмерные параметры кривизны.

### 3. Методы решения уравнений (1-3)

Уравнение (1-3) сводится к задаче Коши с помощью метода конечных разностей второго порядка точности, которые решаются методами типа Рунге-Кутты и Ньюмарка. Исследуется сходимость этих методов в зависимости от кол-ва точек разбиения по пространственным координатам и времени. Спектр Ляпуновских показателей определяется несколькими методами Канца[15], Вольфа[16], Розенштайна[17] и Саваада[18].

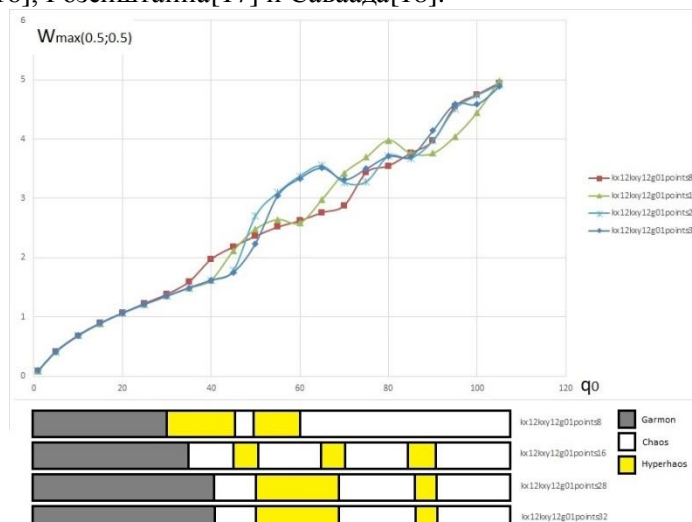


Рисунок 2. Зависимость максимального прогиба в центре оболочки от интенсивности поперечной знакопеременной нагрузки для размернозависимого параметра  $\gamma = 0,1$ .

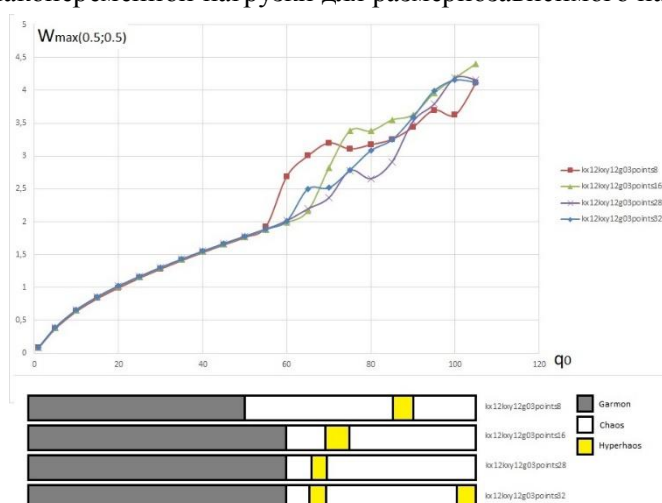
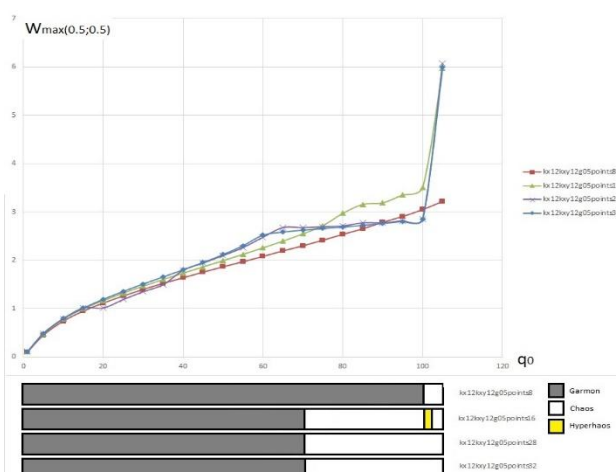


Рисунок 3. Зависимость максимального прогиба в центре оболочки от интенсивности поперечной знакопеременной нагрузки для размернозависимого параметра  $\gamma = 0,3$ .



**Рисунок 4.** Зависимость максимального прогиба в центре оболочки от интенсивности поперечной знакопеременной нагрузки для размернозависимого параметра  $\gamma = 0,5$ .

На рис. (2-4) приведены зависимости максимального прогиба  $w_{max}$  в центре квадратной оболочки  $\lambda = 1, k_x = k_y = 12$ , от интенсивности поперечной знакопеременной нагрузки  $q_0$  и шкалы характера колебаний для размернозависимого параметра  $\gamma = 0,1; 0,3; 0,5$ . Частота  $\omega_p$  соответствует частоте собственных линейных колебаний.

#### 4. Выводы

1. Построена теория размерно-зависимых гибких прямоугольных в плане пластинок Кирхгофа на основе модифицированной моментной теории из принципа Гамильтона-Остроградского.
2. Исследуется сходимость метода конечных разностей второго порядка в зависимости от количества участков деления nano оболочки по  $Ox$  и  $Oy$ . Решение задачи Коши осуществляется с помощью нескольких методов типа Рунге-Кутты от 4-го до 6-го порядка и методом Ньюмарка.
3. Выявлено, что с увеличением размерно-зависимого параметра  $\gamma$  колебания имеют меньшую амплитуду, переход к хаотическим колебаниям происходит при больших нагрузках, чем при  $\gamma = 0$ .
4. Спектр ляпуновских показателей определяется с помощью нескольких методов, для получения достоверных результатов.
5. Впервые выявлено, что для нелинейных колебаний наноболочек возможно появление гиперхаоса.
6. Увеличение параметра  $\gamma$  приводит к изменению формы колебаний оболочки и увеличению зон гармонических колебаний.

#### 5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-08-00354А.

#### 6. Литература

- [1] Chang, W.J. Study of the sensitivity of the first four flexural modes of an AFM cantilever with a sidewall probe / W.J. Chang, H.L. Lee, T.Y.F. Chen // Ultramicroscopy. – 2008. – Vol. 108. – P. 619-624.
- [2] Lee, H.L. Coupled lateral bending–torsional vibration sensitivity of atomic force microscope cantilever / H.L. Lee, W.J. Chang // Ultramicroscopy. – 2008. – Vol. 108. – P. 707-711.
- [3] Kahrobaiyan, M.H. Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory / M.H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M.T. Ahmadian // Int J Eng Sci. – 2010. – Vol. 48. – P. 1985-1994.

- [4] Some design considerations on the electrostatically actuated microstructures / Y.C. Hu, C.M. Chang, S.C. Huang // *Sens Actuat A: Phys.* – 2004. – Vol. 112. – P. 155-161.
- [5] Lun, F.Y. Design and fabrication of microoptomechanical vibration sensor / F.Y. Lun, P. Zhang, F.B. Gao, H.G. Jia // *Microfabr Technol.* – 2006. – Vol. 120. – P. 61-64.
- [6] Wang, Y.C. Chaos in MEMS, parameter estimation and its potential application // *IEEE transactions on circuits and systems. 1. Fundam Theory Appl.* – 1998. – Vol. 45(10). – P. 1013-1020.
- [7] Lozi, R. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems? // *World Scientific Series on Nonlinear Science, World Scientific, Topology and Dynamics of Chaos in Celebration of Robert Gilmore's 70th Birthda.* – 2013. – Vol. 84. – P. 63-98.
- [8] Krysko, A.V. Chaotic vibrations of flexible shallow axially symmetric shells, *Nonlinear Dynamics* / A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, A.A. Zakharova, I.V. Papkova, V.A. Krysko // *Springer Netherlands*, 2018. – P. 1-21.
- [9] Faris, W. Mechanical response of a capacitive microsensor under thermal load / W. Faris, A.H. Nayfeh // *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* – 2007. – Vol. 12. – P. 776-783.
- [10] Moser, Y. Miniaturized flexible temperaturee sensor / Y. Moser, M.A.M. Gijs // *J Microelectromech Syst.* – 2007. – Vol. 16. – P. 1349-1354.
- [11] Krysko Jr, V.A. Mathematical modeling of MEMS elements subjected to external forces, temperature and noise, taking account of coupling of temperature and deformation fields as well as a nonhomogenous material structure / V.A. Krysko Jr, J. Awrejcewicz, T.V. Yakovleva, A.V. Kirichenko, O. Szymanowska, V.A. Krysko // *Journal Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2019. – Vol. 30. – P. 39-58.
- [12] Krysko Jr, V.A. Size-dependent parameter cancels chaotic vibrations of flexible shallow nano-shells / V.A. Krysko Jr, J. Awrejcewicz, V. Dobriyan, I.V. Papkova, V.A. Krysko // *Journal of Sound and Vibration.* – 2019. – Vol. 446. – P. 374-386.
- [13] Awrejcewicz, J. Quantifying chaos by various computational methods. Part 1: Simple systems / J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, N.P. Erofeev, V. Dobriyan, M.A. Barulina, V.A. Krysko // *Entropy.* – 2018. – Vol. 20(3). – P. 175.
- [14] Власов, В.З. *Общая теория оболочек* – М., Гостехиздат, 1949. – 784 с.
- [15] Kantz, H. A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series // *Phys. Lett. A.* – 1994. – Vol. 185. – P. 77-87.
- [16] Wolf, A. Determining Lyapunov Exponents from a time series / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // *Physica D.* – 1985. – Vol. 16. – P. 285-317.
- [17] Rosenstein, M.T. De Luca A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets / M.T. Rosenstein, J.J. Collins, J. Carlo // *Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering – Boston University*, 1992. – P. 20.
- [18] Sato, S. Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems / S. Sato, M. Sano, Y. Sawada // *Prog. Theor. Phys.* – 1987. – Vol. 77. – P. 1.

## Nonlinear dynamics of rectangular nanoshells

V.A. Krysko jr<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State Technical University, Politehnicheskaya 77, Saratov, Russia, 410054

**Abstract.** In this work was constructed mathematical model of nonlinear vibrations of rectangular in plan nanoshells under the influence of a transverse alternating load. The mathematical hypothesis is based on the following hypotheses: the shell is gentle, elastic, isotropic geometric nonlinearity is taken into account according to the theory of von Karman, Kirchhoff-Love kinematic hypothesis. The system of nonlinear partial differential equations in mixed form of the eighth order is constructed from the Hamilton energy principle based on a modified couple stress theory of elasticity. The system of equations reduces to the Cauchy problem by the finite difference method with approximation of the second order of accuracy. The Cauchy problem is solved by methods of the fourth-order Runge-Kutta type. Convergence of these solutions is investigated depending on the integration step in time and space coordinates. It was found that taking nano effects into account leads to an increase the zones of harmonic vibrations in addition to chaotic vibrations, hyperchaotic vibrations ones appear. The transition from harmonic vibrations to chaotic vibrations occurs according to the Feigenbaum scenario. The nature of the vibrations was revealed through analysis sign spectrum of Lyapunov exponents. Hyperchaotic vibrations are characterized by two positive Lyapunov exponents, and chaotic vibrations by one positive Lyapunov exponent. For nanoshells, this phenomenon was revealed for the first time. The range of Lyapunov exponents is determined according to the methods of Wolf, Kantz, Rosenstein and Savaad to obtain reliable results.