Некоторые задачи для процессов с компенсациями разладок

В.Г. Бурмистрова[1], А.А. Бутов[1], М.А. Волков[1], Ю.Ж. Пчелкина[2]

[1]Ульяновский государственный университет, Л. Толстого 42, Ульяновск, Россия, 432063
[2]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В данной работе рассматриваются задачи о компенсациях разладки, а именно, об адаптивных изменениях системы. Предполагается, что компенсации могут быть скачкообразными, непрерывными или комбинированными (смешанными), также различаются и способы задания разладки. В зависимости от способа получения информации (данных о разладке), задачи о компенсации можно разделить на три типа: построенные по принципу фильтрации, экстраполяции и по принципу интерполяции. В данной работе рассматривается ряд постановок и решений задач для скачкообразной компенсации.

1. Введение

В данной работе рассматриваются задачи о компенсациях разладки, а именно, об адаптивных изменениях системы.

Предполагается, что компенсации могут быть скачкообразными, непрерывными или комбинированными (смешанными), также градация задач о компенсации зависит и от способа задания разладки. В зависимости от способа получения информации (данных о разладке), задачи о компенсации можно разделить на три типа: построенные по принципу фильтрации, экстраполяции и по принципу интерполяции.

В данной работе приводятся типы задач со скачкообразной компенсацией. Рассматриваются задачи об обнаружении оптимальных значений интенсивности и скачков компенсаций в случае известной вероятности момента разладки и не известной. В случае заранее заданного распределения разладки, оптимальные показатели компенсации предлагается найти имитационным способом, решив задачу оптимизации. В случае неизвестного момента разладки, оптимальные показатели предлагается найти также имитационным способом, решив задачу оптимизации, а момент разладки найти методами интерполяции.

2. Задача об оптимальных показателях компенсации при заданной функции распределения для момента разладки

Пусть на стохастическом базисе $\mathrm{B} = (\Omega, F, \mathrm{F}{=}(F_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ с обычными условиями Деллашери (основные определения и свойства см., например, [1-2]) задана система непрерывных процессов $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $Y = (\mathrm{Y}_t)_{t\geq 0}$.

$$\begin{cases} X_t = \alpha \cdot I\left\{\theta \le t\right\} \\ Y_t = \int\limits_0^t X_s ds + \sigma W_t \end{cases}, \tag{1}$$

где переменная $\alpha > 0$ ($\alpha \in R$) заранее известна и характеризует угол наклона разладки, θ - момент разладки, который имеет показательное распределение с интенсивностью η ($\eta \in R$), $W = (W_t)_{t\ge 0}$ - стандартный винеровский процесс. Предполагается, что величины θ и W независимы. Параметр $\sigma > 0$ определяет разброс.

Определим потоки σ-алгебр F^Y=$(F_t^Y)_{t\ge0}$, F^X=$(F_t^X)_{t\ge0}$ (являющимися фильтрацией, вложенной в F) с $F_0^Y = \left\{\varnothing, \Omega\right\}$, $F_0^X = \left\{\varnothing, \Omega\right\}$ и $F_t^Y = \sigma\left\{Y_s; s \le t\right\}$, $F_t^X = \sigma\left\{X_s; s \le t\right\}$ - σ-алгебры, порожденные наблюдениями $(Y_s)_{0\le s\le t}$ и $(\mathrm{X}_s)_{0\le s\le t}$ соответственно для каждого $t \ge 0$.

Процесс $X = (X_t)_{t\ge0}$ будем считать процессом - «индикатором» компенсации, процесс $Y = (\mathrm{Y}_t)_{t\ge0}$ - процесс с разладкой, оба процессы наблюдаемые. Процесс $K = (\mathrm{K}_t)_{t\ge0}$ является процессом накопленной компенсации и определяется как:

$$\mathrm{K}_t = \int\limits_0^t I\left\{\int\limits_0^s X_u du - K_s \ge \beta\right\} I\{\tau \le \mathrm{t}\} \cdot \beta d\pi_s, \tag{2}$$

где $\beta > 0$ - уровень компенсации. Процесс $\pi = (\pi_t)_{t\ge0}$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ, допускает разложение вида:

$$\pi_t = \lambda t + m_t^\lambda \tag{3}$$

где $\lambda > 0$ - интенсивность скачков процесса, m_t^λ - мартингал.

Процесс $Z = (\mathrm{Z}_t)_{t\ge0}$ - процесс с компенсацией разладки:

$$Z_t = Y_t - K_t \tag{4}$$

Возникает задача обнаружения оптимальных значений интенсивности и скачка компенсаций. Эту задачу можно отнести к классификации задач последовательного анализа (решение принимается по мере поступления данных) при скачкообразной компенсации и известной разладке. Параметр β в рассматриваемой модели характеризует дозировку воздействия, а λ – частоту воздействия. По формуле (2) видно, что компенсации осуществляются в моменты скачков пуассоновского процесса π, что является первым приближением, позволяющим формулировать и решать такие задачи.

Для решения данной задачи введем целевую функцию:

$$\varPhi_T = \beta \cdot (1 + \lambda \cdot T) + \gamma \cdot EZ_T I\{\mathrm{Z}_T \ge 0\}. \tag{5}$$

Данная целевая функция характеризует взаимосвязь процесса Z и интенсивности компенсаций.

В данной работе решается задача оптимизации:

$$\varPhi_T(\lambda, \beta) \to \min_{\lambda,\beta}. \tag{6}$$

Задача решается способом имитационного моделирования. Локальный экстремум достигается в точке $\lambda = 10$, $\beta = 10$.

3. Задача об оптимальных показателях компенсации в условиях эпизодической наблюдаемости процесса с разладкой

Аналогично, как и в задаче из предыдущего пункта, рассмотрим стохастический базис $\mathrm{B} = (\Omega, F, \mathrm{F}$=$(F_t)_{t\ge0}, \mathrm{P})$ с обычными условиями Деллашери ([1]) на котором задана система

$$\begin{cases} X_t = \alpha \cdot I\{\theta \le t\} \\ Y_t = \int_0^t X_s ds + \delta W_t \end{cases}, \tag{7}$$

где переменная $\alpha > 0$ ($\alpha \in R$) заранее известна и характеризует угол наклона разладки, θ - случайный момент разладки заранее не известный, $W = (W_t)_{t \ge 0}$ - стандартный винеровский процесс. Предполагается, что величины θ и W независимы. Параметр $\delta > 0$ определяет разброс.

Определим поток σ-алгебр $F^Y = (F_t^Y)_{t \ge 0}$ (являющейся фильтрацией, вложенной в F) с $F_0^Y = \{\varnothing, \Omega\}$ и $F_t^Y = \sigma\{Y_s; s \le t\}$ - σ- алгеброй, порожденной наблюдениями $(Y_s)_{0 \le s \le t}$ для каждого $t \ge 0$.

Процесс $X = (X_t)_{t \ge 0}$ не наблюдаемый, так как момент разладки θ не известен, процесс $Y = (Y_t)_{t \ge 0}$ - процесс с разладкой. Процесс $K = (K_t)_{t \ge 0}$ является процессом накопленной компенсации и определяется как:

$$K_t = \int_0^t I\left\{\int_0^s X_u du - K_s \ge \beta\right\} I\{\hat{\tau}_t \le t\} \cdot \beta d\pi_s, \tag{8}$$

где $\beta > 0$ - уровень компенсации. Процесс $\pi = (\pi_t)_{t \ge 0}$ заданный по формуле (3).

Момент $\hat{\tau}_t$ является оценкой момента разладки и является условным средним:

$$\hat{\tau}_t = E\{\tau \mid F_t^Y\} \tag{10}$$

Процесс $Z = (Z_t)_{t \ge 0}$ задан по формуле (4). Возникает задача обнаружения оптимальных значений интенсивности и скачка компенсаций. Для решения данной задачи введем, как и в предыдущем случае, целевую функцию:

$$\Phi_T = \beta \cdot (1 + \lambda \cdot T) + \gamma \cdot E Z_T I\{Z_T \ge 0\}. \tag{11}$$

Для нахождения оптимальных параметров необходимо решить задачу оптимизации:

$$\Phi_T(\lambda, \beta) \to \min_{\lambda, \beta}. \tag{12}$$

Задача решается имитационным способом. Оценка момента разладки $\hat{\tau}_t$ определяется на основе интерполяционного оценивания (МНК).

4. Заключение

Данные задачи имеют прикладное значение при изучении систем, в которых возникают нарушение стабильной работы, например, разрушение или износ приборов. Под разладкой как раз понимается разрушение системы, а под компенсацией восстановление в нормальное состояние системы.

Возможно применение и других задач о компенсации в рамках выбранного одного из типа в рассматриваемых в работе разладок, например, задача о пересечении границ процессами. Граница в данной ситуации может служить критическим уровнем работы системы. Ранее в работе [3] была решена задача о нахождении оценки момента компенсации при заданной функции распределения для момента разладки.

5. Литература

[1] Деллашери, К. Емкости и случайные процессы / К. Деллашери. – М.: Мир, 1975.

[2] Ширяев, А.Н. Статистический последовательный анализ / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1976. – 272 с.

[3] Бурмистрова, В.Г. Система оценивания и принятия решения о компенсаторных воздействиях по наблюдаемым уровням онкомаркеров / В.Г. Бурмистрова, А.А. Бутов, К.О.

Раводин // Материалы 3-й Международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики». – Москва: РГСУ, 2010. – С. 5-6.

Some problems for the processes with compensation of the change-point event

V.G. Burmistrova[1], A.A. Butov [1], M.A. Volkov [1], Yu.V. Pchelkina[2]

[1]Ulyanovsk State University, Lev Tolstoy street 42, Ulyanovsk, Russia, 432063
[2]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. In the article we consider the problems for the processes with compensation of the change-point event, namely for the adaptive changes in a system. We suppose that compensations could be continuous, discontinues or combined. Also the approaches of the change-point description could differ. Depending on the observation method of change-point stopping time, we considered three types problems: similar to filtering, extrapolation and interpolation problems in partially observable schemes.