Некоторые способы оценивания момента пересечения границы процессом с разладкой

В.Г. Бурмистрова[1], А.А. Бутов[1], М.А. Волков[1], А.А. Коваленко[1], М.Г. Москвичева[1]

[1]Ульяновский государственный университет, Льва Толстого 42, Ульяновск, Россия, 432063

Аннотация. В данной работе представлены два способа оценивания момента первого пересечения границы. Для процесса с разладкой в качестве первой оценки рассматривается условное математическое ожидание момента времени, где процесс наблюдается до момента времени t. В качестве второй оценки - измеримый относительно условия наблюдения момент, для которого остановленный им процесс имеет условное среднее, равное значению границы.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются две задачи об оценивании момента первого пересечения границы процессом с разладкой (см.параграф 4 гл.IV в [1]). При этом оказывается возможным построение оценки для каждого момента наблюдения $t \geq 0$ условного математического ожидания, условием для которого являются наблюдения процесса до момента t. В качестве альтернативного способа оценивания предлагается формализация подхода, который заключается в последовательном построении таких измеримых (при условии наблюдений до момента оценивания) моментов, чтобы процесс с разладкой в эти моменты имел условное математическое ожидание, равное уровню пересекаемой границы.

2. Задача оценивания по наблюдениям значений процесса с разладкой до момента времени

Пусть задан стохастический базис $\mathcal{B} = (\Omega, F, \mathrm{F} = (F_t)_{t\geq 0}, P)$ со стандартными условиями полноты и регулярности $\mathrm{F} = (F_t)_{t\geq 0}$ - неубывающего потока σ - алгебр F_t на вероятностном пространстве (Ω, F, P) (основные определения и свойства см., например, параграф 1 гл.1 в [2]).

Рассмотрим задачу об оценивании момента пересечения границы процессом с разладкой в следующей, несколько упрощенной постановке.

Пусть на стохастическом базисе $\mathcal{B}$ заданы независимые стандартный винеровский процесс $W = \left(W_t\right)_{t\geq 0}$ и показательно распределенная случайная величина θ с параметром $\lambda > 0$:

$$P\left\{\theta \leq 0\right\} = 0 \text{ при } x \leq 0\,;\; P\left\{\theta \leq 0\right\} = 1 - \exp\left\{-\lambda x\right\} \text{ при } x > 0\,. \tag{1}$$

Для параметра $\gamma > 0$ рассматривается процесс с разладкой $X = (\mathrm{X}_t)_{t\geq 0}$ с $X_0 = 0$ и

$$X_t = \gamma \cdot \int_0^t I\left\{\theta \leq s\right\} ds + W_t\,, \tag{2}$$

где $I\{\cdot\}$ - индикаторная функция (равная 1 при выполнении условия в скобках и 0 в противном случае). Таким образом, процесс X являет собой упрощение (по сравнению с рассматриваемым в [1]) в том смысле, что коэффициент диффузии равен единице и вероятность разладки в начальный момент времени равна нулю. Эти предложения не ограничивают общности, но помогают упростить изложение.

Обозначим A - уровень границы, первый момент пересечения которой процессом X рассматривается в настоящей работе: для $A>0$ обозначим $\tau=\tau(\mathrm{A})$ момент остановки, равный $\tau(\mathrm{A})=\inf(t:t>0,\mathrm{X}_t\geq A)$.

Определим поток σ - алгебр $\mathrm{F}^X=(F_t^X)_{t\geq 0}$ (являющийся фильтрацией, вложенной в F) с $F_0^X=\{\varnothing,\Omega\}$ и $F_t^X=\sigma\{\mathrm{X}_s;\mathrm{s}\leq\mathrm{t}\}$- σ- алгеброй, порожденной наблюдениями $(\mathrm{X}_s)_{0\leq s\leq t}$ для каждого $t\geq 0$.

Задача заключается в оценивании момента $\tau=\tau(\mathrm{A})$ по наблюдениям X до момента t, т.е. F_t^X. Рассматривается классический подход в построении оценки, который заключается в последовательном нахождении условного среднего:

$$\hat{\tau}=(\hat{\tau}_t)_{t\geq 0} \text{ с } \hat{\tau}_t=E(\tau\,|\,F_t^X).$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\gamma>0$, $A>0$, вероятности $\pi_t=P\left\{\theta\leq t\,|\,F_t^X\right\}$ при каждом $t\geq 0$ оценка $\hat{\tau}_t=E(\tau\,|\,F_t^X)$ имеет вид

$$\hat{\tau}_t=\tau\cdot I\{\tau\leq t\}+\left\{t+\frac{A-X_t}{\gamma}\cdot\pi_t+f(\mathrm{A}-X_t)(1-\pi_t)\right\}\cdot I\{\tau>t\}, \tag{3}$$

где $f(\mathrm{A})=\mathrm{E}\,\tau(\mathrm{A})$.

В рассматриваемом случае (2) (см. параграф 4 гл.IV в [1]) для процесса $\pi=(\pi_t)_{t>0}$, где $\pi_t=P\left\{\theta\leq t\,|\,F_t^X\right\}$, справедливо соотношение

$$\pi_t=\lambda\cdot\int_0^t(1-\pi_s)ds+\gamma\cdot\int_0^t\pi_s\cdot(1-\pi_s)\cdot(dX_s-\gamma\cdot\pi_s\cdot ds), \tag{4}$$

позволяющее осуществить последовательное оценивание вероятности π_t по наблюдениям $(X_s)_{0\leq s\leq t}$.

Доказательство. Для $t=0$ утверждение теоремы выполняется из вида $f(\mathrm{A})$, поскольку $F_0^X=\{\varnothing,\Omega\}$. Пусть $t>0$. Для момента разладки θ введем вспомогательные обозначения событий $B=\{\theta\leq t\}$ и $\overline{B}=\{\theta>t\}$. Обозначим (для краткости изложения) $P_t^X(\cdot)=P(\cdot\,|\,F_t^X)$, $E_t^X(\cdot)=E(\cdot\,|\,F_t^X)$, и для любого события $D\in F_t^X$ обозначим $P_t^X(\cdot\,|\,D)=P(\cdot\,|\,F_t^X,\mathrm{D})$, $E_t^X(\cdot\,|\,D)=E(\cdot\,|\,F_t^X,\mathrm{D})$.

Для момента τ очевидно:

$$\tau=\tau\cdot I\{\tau\leq t\}+\tau\cdot I\{\tau>t\}=\tau\cdot I\{\tau\leq t\}+\tau\cdot I\{\mathrm{B}\}\cdot I\{\tau>t\}+\tau\cdot I\{\overline{\mathrm{B}}\}\cdot I\{\tau>t\},$$

из чего следует:

$$\hat{\tau}_t = E_t^X(\tau) = \tau \cdot I\{\tau \le t\} + E_t^X(\tau \cdot I\{\mathrm{B}\} \,|\, \mathrm{B}) \cdot I\{\tau > t\} \cdot P_t^X(\mathrm{B}) + E_t^X(\tau \cdot I\{\overline{B}\} \,|\, \overline{B}) \cdot I\{\tau > t\} \cdot P_t^X(\overline{B}),$$

где случайные величины $I\{\tau > t\}$ и $\tau \cdot I\{\tau \le t\}$ являются F_t^X - измеримыми.

Величина $E_t^X(\tau \cdot I\{\mathrm{X}\} \,|\, \mathrm{X})$ на множестве $\tau > t$ совпадает с условным математическим ожиданием момента пересечения границы A винеровским процессом $(W_u)_{u \ge 0}$ с постоянным сносом $\gamma \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{t})$ и началом значения X_t.

Однако, для такого процесса $\Psi = (\Psi_u)_{u \ge t}$ с $\Psi_t = x$ и

$$\Psi_u = x + \gamma(u - t) + (W_u - W_t).$$

Математическое ожидание $g(\beta) = E\tilde{\gamma}(\mathrm{A})$ момента $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\mathrm{A})$ пересечения границы A

$$\tilde{\gamma}(\mathrm{A}) = \inf(s : s > 0, \Psi_s \ge A)$$

определяется из равенства

$$\Psi_{\tilde{\gamma}(\mathrm{A})} = A$$

и

$$x + \gamma \cdot (\tilde{\gamma}(\mathrm{A}) - \mathrm{t}) + W_{\tilde{\gamma}(\mathrm{A})} = A$$

По теореме об остановленном мартингале (см., например, [2]) выполняется равенство $EW_{\tilde{\gamma}(\mathrm{A})} = 0$ и, следовательно

$$g(\mathrm{A}) = t + \frac{A - x}{\gamma} \tag{5}$$

Следовательно,

$$E_t^X(\tau \cdot I\{\mathrm{B}\} \,|\, \mathrm{B}) \cdot I\{\tau > t\} = \{\frac{A - X_t}{\gamma} + t\} \cdot I\{\tau > t\} \tag{6}$$

В связи с тем, что θ и W независимы и распределение θ при условии $\overline{B}$ совпадает с исходным распределением, но смещенным по аргументу на величину t, то

$$E_t^X(\tau \cdot I\{\overline{B}\} \,|\, \overline{B}) \cdot I\{\tau > t\} = \{f(\mathrm{A} - X_t) + t\} \cdot I\{\tau > t\}, \tag{7}$$

где $P_t^X(\mathrm{B}) = \pi_t$, $P_t^X(\overline{B}) = 1 - \pi_t$. Следовательно, из (5), (6), (7) получаем (3). Теорема доказана.

Заметим, что функция $f(\mathrm{x}) = \mathrm{E}\,\tau(\mathrm{x})$ для $\mathrm{x} \ge 0$ определяется следующим выражением:

$$f(x) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda u} \left\{ \int_0^u \frac{x}{\sqrt{2\pi s}} \cdot e^{-x^2/(2s)} ds + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} (\mathrm{u} + \frac{x - y}{\alpha}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \cdot (e^{-y^2/(2u)} - e^{-(y-2x)^2/(2u)}) dy \right\} du. \tag{8}$$

Значения $f(\mathrm{x})$ по формуле (8) возможно получать лишь методами численного интегрирования, заведомо приближенное. Альтернативой может служить имитационное моделирование процесса ξ с последующим построением эмпирических средних для $\mathrm{E}\,\tau(\mathrm{x})$ - также в качестве приближения.

Действительно для каждого значения $u \ge 0$ очевидны тождества

$$E\tau = E\tau \cdot I\{\tau \le u\} + E\tau \cdot I\{\tau > u\} \tag{9}$$

и

$$E(\tau \,|\, \theta = u) = E(\tau \cdot I\{\tau \le u\} \,|\, \theta = u) + E(\tau \cdot I\{\tau > u\} \,|\, \theta = u) \tag{10}$$

Обозначим $r_1(u) = E(\tau \cdot I\{\tau \le u\} \,|\, \theta = u)$ и $r_2(u) = E(\tau \cdot I\{\tau > u\} \,|\, \theta = u)$. Поскольку момент θ имеет плотность распределения $\lambda \cdot e^{-\lambda u}$ при $u \ge 0$, то из (9), (10) следует равенство

$$E\tau = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda u}(r_1(u) + r_2(u))du\,. \tag{11}$$

Для нахождения $r_1(u)$ заметим, что при условии $\{\theta = u\}$ достижение процессом X уровня $x > 0$ (для значения $x = 0$ очевидно равенство $f(0) = 0$ поскольку $X = 0$) в моменты $\tau \le u$ осуществляется с плотностью распределения времени прохождения уровня x винеровским процессом, поскольку снос до момента θ равен нулю. Поскольку эта плотность (см. например, с. 425 справочника [3]) равна $\frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} \cdot e^{-x^2/(2s)}$, то

$$r_1(u) = \int_0^{u} \frac{x}{\sqrt{2\pi s}} \cdot e^{-x^2/(2s)} ds\,. \tag{12}$$

При этом совместное распределение максимума и значения винеровского процесса имеет плотность (по переменным y процесса W_u с $y \le x$ и максимумом, меньшим x, также см. [3])

$$\rho(\mathrm{y}; u, x) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{y-2x}^{y} e^{-s^2/(2u)} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} (e^{-y^2/(2u)} - e^{-(y-x)^2/(2u)})\,. \tag{13}$$

Также заметим, что при условии $\tau > u$ математическое ожидание момента пересечения уровня $x > 0$ процессом, выходящим в момент u из точки y (с $y < x$) равно (аналогично (8))

$$r_2(u) = \int_{-\infty}^{x} (u + \frac{x - y}{\alpha}) \cdot \rho(y; u, x) dx\,. \tag{14}$$

Из формул (11)-(14) и следует (8).

3. Эмпирический подход оценивания момента пересечения границы процесса с разладкой

Исследования моменты пересечения границы $A > 0$ рассмотрим в каждый момент времени $t \ge 0$: F_t^X - измеримую случайную величину $\beta(\mathrm{t})$, такую что в этот момент $\beta(\mathrm{t})$ процесс X имеет условное среднее значение, равное уровню границы:

$$E_t^X(\mathrm{X}_{\beta(t)}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{\beta(t)} \mid F_t^X) = A \tag{15}$$

При этом, в силу включения $\{\tau \le t\} \in F_t^X$, очевидно, выполняется

$$\beta(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{I}\{\tau \le t\} = \tau \cdot I\{\tau \le t\} \tag{16}$$

Оценка $\beta(\mathrm{t})$ момента τ названа здесь эмпирической (конечно, условно), поскольку она определяется последовательно по наблюдениям $(\mathrm{X}_s)_{0 \le s \le t}$. При этом, не являясь, вообще говоря, несмещенной, в силу конечности момента τ очевидно имеет место сходимость при $t \to \infty$

$$\beta(\mathrm{t}) \to \tau \quad P - п.н. \tag{17}$$

Отметим, что в прикладных областях такие оценки реализуются и используются в задачах приближенного оценивания и прогнозирования (см., например, [4]).

Для детерминированного случая $\tilde{X}_t = EX_t$ поиск β заключается в нахождении такого числа $\beta(0)$, что

$$\tilde{X}_{\beta(0)} = a \tag{18}$$

Очевидно, осуществление последовательного оценивания в форме $\beta = (\beta(\mathrm{t}))_{t \ge 0}$ с F_t^X - измеримыми неубывающими моментами $\beta(t) \ge \beta(\mathrm{s})$ при $t \ge s$) представляет собой F_t^X - согласованную локализацию предсказуемого момента остановки τ .

Для случая (18) в силу равенства

$$\tilde{X}_t = \gamma \int_0^t (1-e^{-\lambda s})ds = \gamma(t - \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})) \tag{19}$$

значения $\beta(0)$ определяется как решение трансцендентного уравнения

$$\beta(0) - \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda\beta(0)}) = \frac{A}{\gamma} \tag{20}$$

Поэтому достаточно понятным является обобщение детерминированного случая (18) на F^X - согласованный случай (15):

Утверждение. Из соотношений (21) и (22) определяется значение $\beta = (\beta(\mathrm{t}))_{t\geq 0}$ при $t \geq 0$

$$\beta(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{I}\{\tau \leq \mathrm{t}\} = \tau \cdot \mathrm{I}\{\tau \leq \mathrm{t}\} \tag{21}$$

$$\{(\beta_t - t) - \frac{1-\pi_t}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda(\beta_t - t)})\}\,\mathrm{I}\{\tau > \mathrm{t}\} = \frac{(\mathrm{A} - X_t)}{\lambda} \cdot \mathrm{I}\{\tau > \mathrm{t}\} \tag{22}$$

где $\pi_t = P_t^X\{\theta \leq t\}$.

В рассматриваемом случае (2) (см.параграф 4 гл.IV в [1]) для процесса $\pi = (\pi_t)_{t>0}$, рассматриваемого в теореме, справедливо соотношение

$$\pi_t = \lambda \cdot \int_0^t (1-\pi_s)ds + \gamma \cdot \int_0^t \pi_s \cdot (1-\pi_s) \cdot (dX_s - \gamma \cdot \pi_s \cdot ds), \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный процесс $(\nu_t(u))_{u\geq t}$ при каждом $t \geq 0$ с

$$\nu_t(u) = A \cdot I\{\tau \leq t\} + X_u \cdot I\{\tau > t\} \quad \text{или} \quad \nu_t(u) = \beta \cdot I\{\tau \leq t\} + (\mathrm{X}_t + \alpha \cdot \int_t^u I\{\theta \leq s\}ds + \int_t^u dW_s) \tag{24}$$

Следовательно $\nu_t(\mathrm{t}) = X_{t\wedge\tau}$ и для $(\nu_u(\mathrm{t}))_{u\geq t}$ условие (15) эквивалентно выполнению при каждом $t \geq 0$

$$E_t^X \nu_t(\beta(t)) = A. \tag{25}$$

Данное выражение влечет в силу F_t^X - измеримости $\beta(\mathrm{t})$ соотношение

$$A \cdot I\{\tau \leq t\} + (\mathrm{X}_t + \gamma \cdot \int_t^{\beta(t)} E_t^X \pi_s ds) \cdot I\{\tau > t\} = A \tag{26}$$

Из (26) следует соотношение

$$(\int_t^{\beta(t)} E_t^X \pi_s ds) \cdot I\{\tau > t\} = \frac{A - X_t}{\gamma} \cdot I\{\tau > t\} \tag{27}$$

Процесс $(\int_0^t \pi_s(1-\pi_s)(dX_s - \gamma \cdot \pi_s ds))_{t\geq 0}$ относительно (F^X, P) является винеровским процессом, [1], поэтому получаем для $E_t^X \pi_s$ при $s \geq t$ простое соотношение

$$E_t^X \pi_s = \pi_t + \lambda \int_t^s (1 - E_t^X \pi_u)du,$$

решение которого определяет левую часть в уравнении (27), что и завершает доказательство утверждения.

4. Заключение

Полученные в работе результаты применимы в задачах определения моментов разладок измеримых процессов. Процессы с разладками находят применение в различных областях:биологии, медицины, экономики, техники и др.

Определение момента разладки – существенного изменения значения процесса является важной задачей оценивания, так как момент разладки – это момент начала процесса повреждения или разрушения системы. Ранее обнаружение такого момента позволяет выполнить корректирующие мероприятия для предотвращения дальнейшего разрушения наблюдаемой системы.

5. Литература

[1] Ширяев, А.Н. Статистический последовательный анализ / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
[2] Липцер, Р.Ш. Теория мартингалов / Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1986.
[3] Королюк, В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985.
[4] Бутов, А.А. Принципы разработки системы прогнозирования и предотвращения авиационных происшествий при организации и производстве воздушных перевозок / А.А. Бутов, М.А. Волков, В.Д. Шаров // Известие Самарского научного центра Российской академии наук. – 2012. – Т. 14, № 4(2). – С. 386-393.

Some approaches of estimation of the stopping time of the cross-boundary event for the process with change-point

V.G. Burmistrova[1], A.A. Butov[1], M.A. Volkov[1], A.A. Kovalenko[1], M.G. Moskvicheva[1]

[1]Ulyanovsk State University, Lev Tolstoy street 42, Ulyanovsk, Russia, 432063

Abstract. In this paper two approaches of estimation of the first crossing time of a border are presented. As a first estimate (for the process with the change-point on the interval of observation [0,t]) the conditional mean value expectation of the stopping-time is considered. The second considered estimate – the measurable and observable stopping-time for which the conditional mean value of the appropriate process is equal to the value of the boundary.