Моделирование взаимодействия цилиндрических тел со сложными поверхностными свойствами

К.Е. Казаков[1]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, пр-т Вернадского 101-1, Москва, Россия, 119526

Аннотация. Описана осесимметричная контактная задача о взаимодействии цилиндри-ческих тел со сложными поверхностными свойствами (упругими характеристиками или формами поверхностей). Для данной задачи построена его математическая модель, пред-ставляющая из себя смешанное интегральное уравнение. Получено аналитическое решение задачи о нахождении контактных давлений под втулкой. Построенное решение позволяет проводить эффективные расчеты аже в случае, когда форма или неоднородность покрытия описывается быстро изменяющейся или разрывной функцией.

1. Введение

На практике довольно часто используются многослойные трубы. Это объясняется тем, что они могут подвергаться воздействию агрессивных сред, должны отвечать требованиям безопасности и т.д. Поэтому часть слоев такой трубы обеспечивают жесткость конструкции, а другие позволяют удовлетворить дополнительным требованиям. Кроме того, важно учитывать тот факт, что в процессе эксплуатации материалы стареют и, как следствие, их свойства меняются с течением времени. Для крепления труб зачастую используют крепления, которые их обжимают, в результате чего труба деформируется. Некоторые контактные задачи для труб с однородными покрытиями были решены в работах [1, 2]. Однако в тех работах не принималось во внимание то, что покрытия могут обладать неоднородностью, а форма обжимающего крепления может опиисываться довольно сложной функцией. Данная статья посвящена исследованию задачи взаимодействия трубы с неоднородным вдольнаправляющей оси покрытием и жесткой втулки, профиль которой описывается сложной функцией. Построение решения для данной задачи основано на исследованиях плоских задач, проведенных в работах [3, 4].

2. Математическая модель

На вязкоупругую стареющую трубу, покрытую упругим слоем, в некоторый момент времени τ_0 надевают жесткую цилиндрическую втулку с натягом δ. Внутренний радиус трубы в недеформированном состоянии равен $r_{\rm in}$, толщина внутреннего слоя — $h_{\rm in}$, толщина внешнего слоя — $h_{\rm out}$ (внутренний радиус внешней трубы в недеформированном состоянии $r_{\rm out} = r_{\rm in} + h_{\rm in}$). Между слоями осуществляется гладкий контакт. Покрытие неоднородно вдоль направляющей оси z, т.е. его модуль Юнга $E_{\rm out} \equiv E_{\rm out}(z)$ и коэффициент Пуассона $\nu_{\rm out} \equiv \nu_{\rm out}(z)$ зависят только от координаты z. Внутренний радиус втулки зависит от координаты z и не превышает наружного радиуса внешней трубы, т.е. $g(z) \leq r_{\rm out} + h_{\rm out}$ (в этом случае натяг зависит от координаты z и равен $\delta(z) = r_{\rm out}+h_{\rm out}-g(z))$. Предполагается, что толщина внешнего слоя намного меньше, чем длина втулки $2a$ и внутренний радиус $r_{\rm in}$, между втулкой и внешним слоем осуществляется гладкий контакт вдоль всей длины втулки и втулка расположена на достаточном расстоянии от концов трубы, поэтому их влиянием на напряженно-деформированное состояние под втулкой можно пренебречь.

Можно показать, что приравнивая вертикальное перемещение под действием распределенного давления (контактного давления) величине натяга, можно получить смешанное интегральное уравнение вида (see, for example, [1, 5])

$$\begin{gathered}\frac{1-\nu_{\rm out}^2(z)}{E_{\rm out}(z)}h_{\rm out}q(z,t)+\frac{2(1-\nu_{\rm in}^2)}{\pi}\left[\frac{1}{E_{\rm in}(t-\tau_{\rm in})}\int\limits_{-a}^{a}k_{\rm cyl}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\rm in}}\right)q(\zeta,t)\,{\rm d}\zeta\right.\\ \left.+\int\limits_{\tau_0}^{t}\frac{K(t-\tau_{\rm in},\tau-\tau_{\rm in})}{E_{\rm in}(\tau-\tau_{\rm in})}\int\limits_{-a}^{a}k_{\rm cyl}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\rm in}}\right)q(\zeta,\tau)\,{\rm d}\zeta\,{\rm d}\tau\right]=r_{\rm out}+h_{\rm out}-g(z),\end{gathered}\tag{1}$$

где $q(z,t)$ — неизвестное контактное давление, $\nu_{\rm in}$ и $E_{\rm in}(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга внутреннего слоя, $\tau_{\rm in}\le\tau_0$ — момент времени его изготовления; $k_{\rm cyl}(s)$ — известное ядро цилиндрической контактной задачи [1, 5], обладающее теми же свойствами, что и ядро плоской контактной задачи (см., например, [6]), $K(t,\tau)$ — ядро ползучести [5].

3. Решение задачи

Можно показать, что уравнение (1) можно привести к безразмерному виду

$$c^*(t^*)m^*(z^*)q^*(z^*,t^*)+(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{F}q^*(z^*,t^*)=\delta^*-g^*(z^*),\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1\tag{2}$$

при помощи замены переменных

$$z^*=\frac{z}{a},\quad \zeta^*=\frac{\zeta}{a},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_{\rm in}^*=\frac{\tau_{\rm in}}{\tau_0},\quad \delta^*=\frac{r_{\rm out}+h_{\rm out}}{a},\quad g^*(z^*)=\frac{g(z)}{a},\quad c^*(t^*)=\frac{E_{\rm in}(t-\tau_{\rm in})}{E_\circ},$$

$$m^*(z^*)=\frac{[1-\nu_{\rm out}^2(z)]h_{\rm out}E_\circ}{2(1-\nu_{\rm in}^2)aE_{\rm out}(z)},\quad q^*(z^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_{\rm in}^2)q(z,t)}{E_{\rm in}(t-\tau_{\rm in})},\quad K^*(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_{\rm in},\tau-\tau_{\rm in})\tau_0,$$

$$k^*(z^*,\zeta^*)=\frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\rm in}}\right),\quad \mathbf{F}^*f(x^*)=\int\limits_{-1}^{1}k^*(z^*,\zeta^*)f(\zeta^*){\rm d}\zeta^*,\quad \mathbf{V}^*f(t^*)=\int\limits_{1}^{t^*}K^*(t^*,\tau^*)f(\tau^*){\rm d}\tau^*.$$

Следует отметить, что в полученном уравнении функции $m^*(z^*)$ и $g^*(z^*)$ связаны с неоднородностью покрытия и формой контактной поверхности втулки, которые могут описываться быстро изменяющимися функциями.

Уравнение (2) по виду и свойствам входящих в него функций совпадает с уравнением (1.2) из работы [3] (предполагая, что $\delta(t)\equiv\delta$ и $\alpha(t)=0$). Решение такого уравнения будет строится аналогичным методом за тем лишь исключением, что в настоящей работе правая часть известна. Можно показать, что решение поставленной задачи представимо в виде

$$q^*(z^*,t^*)=\frac{1}{m^*(z^*)}\sum_{k=0}^{\infty}z_k^*(t^*)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}p_m^\circ(z^*)-\frac{g^*(z^*)}{c^*(t^*)m^*(z^*)},\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1,\tag{3}$$

в котором коэффициенты ψ_{km} известны, функции $z_k(t^*)$ непрерывны и связаны с вязкоупругостью и старением материала внутреннего слоя, а функции $p_m^\circ(z^*)$ — многочлены степени m. Приведя решение (3) к размерному виду, получим

$$q(z,t)=\frac{E_{\rm out}(z)}{1-\nu_{\rm out}^2(z)}\sum_{k=0}^{\infty}z_k(t)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}p_m^\circ\left(\frac{z}{a}\right)-\frac{E_{\rm out}(z)g(z)}{[1-\nu_{\rm out}^2(z)]h_{\rm out}},\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1,$$

где $z_k(t)=z_k^*(t/\tau_0)E_{\rm in}(t-\tau_{\rm in})a/(E_\circ h_{\rm out})$.

4. Результаты и выводы

Поставлена и решена задача контактного взаимодействия жесткой втулки и трубы с неоднородным покрытием. Представлено аналитическое решение в виде ряда. Полученное решение позволяет анализировать изменение напряженно-деформированного состояния многослойной трубы в течение времени. В формуле для контактного давления упругие свойства покрытия и профиль втулки выделены отдельными слагаемыми и сомножителями. Такая форма решения позволяет проводить эффективные расчеты для реальных неоднородностей покрытия и профилей втулки. Для достижения высокой точности при численных расчетах достаточно использовать небольшое количество слагаемых в ряде.

5. Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 18-01-00770 и 18-01-00920.

6. Литература

[1] Манжиров, А.В. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления / А.В. Манжиров, В.А. Черныш // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – Т. 6. – С. 112-118.

[2] Манжиров, А.В. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом / А.В. Манжиров, В.А. Черныш // ПМТФ. – 1990. – Т. 6. – С. 101-109.

[3] Манжиров, А.В. Моделирование контактного взаимодействия неоднородного основания с шероховатым штампом / А.В. Манжиров, К.Е. Казаков // Мат. моделир. – 2017. – Т. 29, № 10. – С. 95-104.

[4] Manzhirov, A.V. The interaction between a coated foundation and a rigid punch with rough surfaces / A.V. Manzhirov, K.E. Kazakov // Lect. Notes Engng Comp. Sci. – 2017. – Vol. 2230. – P. 993-996.

[5] Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 320 с.

[6] Александров, В.М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков – Изд-во ООО “ЦВВР”, 2007. – 114 с.

Modeling of the interaction of cylindrical bodies with complex surface properties

K.E. Kazakov[1]

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, Russia, 119526

Abstract. The axisymmetric contact problem of interaction between cylindrical bodies with complex surface properties (elastic properties or shapes) is described. For this problem, its mathematical model is constructed. It is mixed integral equation. An analytical solution for the problem of finding contact stresses under the bush is obtained. It allow one to make efficient calculations even when the coating form or nonuniformity described by rapidly changing or discontinuous functions.