

# Моделирование работы спектральных фильтров ТГц диапазона с использованием векторных Бесселевых пучков

П.В. Мокшин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Статья посвящена моделированию работы спектральных фильтров, основанного на использовании линейно-изменяющихся параметров. В данной работе приведены оценки размеров пятна рассеяния в зависимости от параметров спектрального фильтра. Результаты были получены с помощью разложения падающего излучения по векторным бесселевым волнам. Численный расчёт показал, что значительное ухудшение разрешения имеет место только в случае короткофокусных оптических систем.

## 1. Введение

До появления видеоспектрометров спектры отражения и излучения поверхности Земли мало использовались в качестве идентификационных признаков, хотя изучались десятки лет и были хорошо известны [1–4]. Это было связано с тем, что авиационные спектрометры имели низкое геометрическое разрешение, давали информацию только вдоль линии полёта и позволяли судить о спектральных свойствах лишь достаточно протяжённых объектов. В результате видеоспектральной съёмки формируется многомерное пространственно-спектральное изображение, в котором каждый элементарный участок изображения – «пиксел» – характеризуется собственным спектром. Такое изображение носит название «куба» информации, два измерения которого соответствуют пространственному изображению местности на плоскости, а третье – характеризует спектральные свойства изображения. Спектральное разрешение современных видеоспектрометров достигает 1,8–2,0 нм и обеспечивает построение спектральных характеристик подстилающей поверхности, определяемой мгновенным полем зрения прибора (для авиационных видеоспектрометров – около 1 мрад [5, 6]).

В данной работе рассмотрено действие спектральных фильтров [7] с изменяемыми по апертуре спектральными характеристиками [8–12].

В случае использования фильтров каждая точка изображения проходит множество светофильтров. Для того чтобы восстановить гиперспектральное изображение, требуется найти функцию рассеяния точки для каждого спектрального фильтра. Для этого необходимо разработать методы моделирования спектральных фильтров. Предметом данной работы является моделирование гиперспектрального блока с использованием векторных Бесселевых пучков. Это позволяет ускорить время моделирования примерно на порядок.

## 2. Решение задачи о прохождении электромагнитных волн через слоистые структуры на основе разложения по каноническим бездифракционным поляризованным пучкам

Во многих оптических приложениях необходимо решать задачу прохождения бездифракционной волны через металлический или диэлектрический слой. Бездифракционные (самовоспроизводящиеся) волновые пучки обладают общим интересным свойством: при распространении в свободном пространстве у них изменяется только фаза, но не изменяется распределение комплексной амплитуды. Некоторые бездифракционные пучки обладают ещё одним замечательным свойством: они представляются в виде функции с разделяющимися переменными. Будем называть бездифракционные пучки с разделяющимися переменными каноническими бездифракционными пучками.

Система уравнений Максвелла в цилиндрических координатах относительно поперечных компонент электрического и магнитного поля имеет вид:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial |W\rangle}{\partial x^3} = H |W\rangle, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{1}{k^2} C \left( e(x^1) \right) - \sigma, \quad B = -\frac{1}{k^2} C \left( 1 + \varepsilon(x^1) \right) \sigma, \quad (2)$$

$$C \left( e(x^1) \right) = \begin{pmatrix} D e(x^1) D_2; & -D e(x^1) D_1; \\ e(x^1) D_2 D_2; & e(x^1) D_2 D_1; \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \frac{1}{x^1} \frac{\partial (x^1)}{\partial x^1} = \frac{1}{x^1} + D, \quad (4)$$

$$D_2 = \frac{1}{x^1} \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad e(x^1) = \varepsilon^{-1}(x^1).$$

где  $x_1$  – радиальная координата,  $x_2$  – угловая переменная.

В цилиндрических координатах бездифракционные пучки имеют следующий вид:

$$\mathbf{w}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{w}(x^1, x^2) \exp\{ik\gamma x^3\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{w}_{TM}(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ \varepsilon \mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{pmatrix} \exp\{ik\gamma x^3\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{w}_{TE}(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ \gamma \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{pmatrix} \exp\{ik\gamma x^3\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} J_m(k\alpha x^1) \\ \frac{im}{x^1} J_m(k\alpha x^1) \end{pmatrix} \exp(imx^2), \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} -\frac{im}{x^1} J_m(k\alpha_{n_2} x^1) \\ \frac{\partial}{\partial x^1} J_m(k\alpha_{n_2} x^1) \end{pmatrix} \exp(imx^2), \quad (9)$$

где  $\gamma$  – постоянная распространения бездифракционного пучка,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $J_m(x)$  – цилиндрические функции Бесселя,  $x^1, x^2, x^3$  – цилиндрические координаты.

Пучки  $\mathbf{w}_{TM}$  называются пучками поперечно-магнитного типа. Они не имеют продольной составляющей магнитного поля. Пучки  $\mathbf{w}_{TE}$  называются пучками поперечно-электрического типа. Они не имеют продольной составляющей электрического поля.

Рассмотрим разложение результирующего поля в виде суперпозиции бездифракционных ТМ- и ТЕ-поляризованных пучков. Формальная теория представления решения системы уравнений Максвелла в виде суперпозиции бездифракционных пучков изложена в Приложении А. В однородной среде выражение для пучков имеет вид:

$$\mathbf{W}_{TM}(x^1, x^2, x^3) = \begin{Bmatrix} \gamma(\varepsilon_0, \alpha) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ \varepsilon_0 \mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{Bmatrix} \exp\{ik[\gamma(\varepsilon_0, \alpha)x^3]\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{W}_{TE}(x^1, x^2, x^3) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ \gamma(\varepsilon_0, \alpha) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{Bmatrix} \exp\{ik[\gamma(\varepsilon_0, \alpha)x^3]\}, \quad (11)$$

где

$$\gamma(\varepsilon_0, \alpha) = \sqrt{\varepsilon_0 - \alpha^2}.$$

Рассмотрим только компоненты электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x^1, x^2, x^3) &= \int_0^\infty \sum_m \left( \gamma(\varepsilon_0, \alpha) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2), -\mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \right) \times \\ &\times \begin{Bmatrix} A_0(\alpha, m) \\ B_0(\alpha, m) \end{Bmatrix} \exp\{ik\gamma(\varepsilon_0, \alpha)x^3\} d\alpha \end{aligned} \quad (12)$$

При  $x^3=0$ :

$$\mathbf{E}_0(x^1, x^2) = \int_0^\infty \sum_m \left( \gamma(\varepsilon_0, \alpha) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2), -\mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \right) \begin{Bmatrix} A_0(\alpha, m) \\ B_0(\alpha, m) \end{Bmatrix} d\alpha. \quad (13)$$

Далее, используя соотношение ортогональности для функций Бесселя, получаем коэффициенты разложения  $A_0(\alpha, m)$ ,  $B_0(\alpha, m)$  по ТЕ- и ТМ-волнам.

После прохождения слоистой среды компоненты электрического поля имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} A(\alpha, m) \\ B(\alpha, m) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{TM} & 0 \\ 0 & T_{TE} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0(\alpha, m) \\ B_0(\alpha, m) \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Объединяя формулы, получаем выражение для компонент электрического поля после прохождения слоистой структуры

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x^1, x^2, x^3) &= \int_0^\infty \sum_m \left( \gamma(\varepsilon_0, \alpha) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2), -\mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \right) \times \\ &\times \begin{Bmatrix} A(\alpha, m) \\ B(\alpha, m) \end{Bmatrix} \exp\{ik\gamma(\varepsilon_0, \alpha)x^3\} d\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Приведённая формула в дальнейшем будет использована для моделирования пятна рассеяния точки при прохождении спектрального фильтра.

### 3. Расчёт коэффициента отражения и пропускания на квазипериодической системе диэлектрической системы слоёв

В данном разделе рассмотрено распространение волны в структуре, представляющей систему слоёв с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и толщинами  $d_1$ ,  $d_2$  соответственно. В середине структуры находится дефект, представляющий собой слой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$  и толщиной  $d_0$ . Первый и последний слои имеют диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_1$ . Непосредственно к дефекту прилегает слой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ .

Для случая плоских волн базовые методы изложены в работах [13 – 15]. В данной работе приведены методы, инвариантные к выбору бездифракционных пучков. Однако, несмотря на этот факт, все формулы в данной работе будем приводить в цилиндрической системе координат. Решение в однородной среде:

В случае ТМ-поляризации решение системы уравнений Максвелла представляется в виде

$$\mathbf{w}_{TM}(x^1, x^2, x^3) = \begin{Bmatrix} a_{TM}(\alpha, x^3) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ b_{TM}(\alpha, x^3) \mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Подставляя это представление в уравнения Максвелла, получаем, что уравнение для функций  $a_{TM}(\alpha, x^3)$ ,  $b_{TM}(\alpha, x^3)$  в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид

$$\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x^3} \begin{Bmatrix} a_{TM}(\alpha, x^3) \\ b_{TM}(\alpha, x^3) \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \gamma^2(\varepsilon, \alpha) \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{TM}(\alpha, x^3) \\ b_{TM}(\alpha, x^3) \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

где  $\gamma(\varepsilon_0, \alpha) = \sqrt{\varepsilon_0 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$ .

Решение в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид

$$\begin{Bmatrix} a_{TM}(\alpha, x^3) \\ b_{TM}(\alpha, x^3) \end{Bmatrix} = G(\varepsilon, \alpha) U(\varepsilon, \alpha, x_0, x_1, x^3) \begin{Bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

$$G(\varepsilon, \alpha) = (g_1(\varepsilon, \alpha) \quad g_2(\varepsilon, \alpha)),$$

$$g_1(\varepsilon, \alpha) = \begin{pmatrix} \gamma(\varepsilon, \alpha) \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad g_2(\varepsilon, \alpha) = \begin{pmatrix} -\gamma(\varepsilon, \alpha) \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$U(\varepsilon, \alpha, x_0, x_1, x^3) = \begin{Bmatrix} \exp(ik\gamma(\varepsilon, \alpha)(x^3 - x_0)) & 0 \\ 0 & \exp(-ik\gamma(\varepsilon, \alpha)(x^3 - x_1)) \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

В случае ТЕ-поляризации решение системы уравнений Максвелла представляется в виде

$$\mathbf{w}_{TE}(x^1, x^2, x^3) = \begin{Bmatrix} -a_{TE}(\alpha, x^3) \mathbf{e}_{2,\alpha,m}(x^1, x^2) \\ b_{TE}(\alpha, x^3) \mathbf{e}_{1,\alpha,m}(x^1, x^2) \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Уравнение для функций  $a_m(\alpha, x^3)$ ,  $b_m(\alpha, x^3)$  в однородной среде имеет вид

$$\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x^3} \begin{Bmatrix} a_{TE}(\alpha, x^3) \\ b_{TE}(\alpha, x^3) \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2(\varepsilon, \alpha) & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_{TE}(\alpha, x^3) \\ b_{TE}(\alpha, x^3) \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Решение в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид, аналогичный виду для ТМ-поляризации. Однако матрица  $G(\varepsilon_1, \alpha)$  имеет вид

$$G(\varepsilon_1, \alpha) = (g_1(\varepsilon_1, \alpha) \quad g_2(\varepsilon_1, \alpha)),$$

$$g_1(\varepsilon, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma(\varepsilon, \alpha) \end{pmatrix}, \quad g_2(\varepsilon, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma(\varepsilon, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Полученные уравнения полностью совпадают с уравнениями в работе [16], поэтому для прохождения векторных бесселевых мод через спектральный фильтр будем использовать алгоритм, приведенный в работе [16].

#### 4. Прохождение векторной бесселевой волны через спектральный фильтр

Рассмотрим прохождение векторной бесселевой волны через спектральный фильтр, изображенный на рис. 1 со следующими параметрами:  $\varepsilon_1 = 2,25$ ;  $\varepsilon_2 = 6,25$ ;  $\varepsilon_d = 1$ ;  $d_1 = \lambda_0/6$  - толщина слоя с  $\varepsilon_1$ ;  $d_2 = 0,1\lambda_0$  - толщина слоя с  $\varepsilon_2$ ;  $d = 0,5\lambda_0$  - толщина слоя с  $\varepsilon_d$ ;  $\lambda_0 = 100$  мкм.

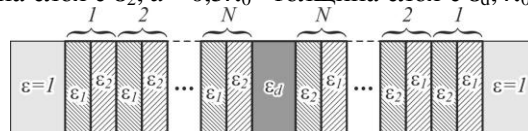
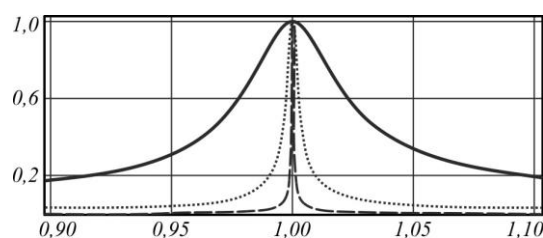


Рисунок 1. Структура слоёв спектрального фильтра.

Увеличение числа периодов  $N$ , используемых в спектральном фильтре, приводит к сужению полосы пропускания длин волн. Как видно из рис. 2, с увеличением числа слоёв запрещённая зона вокруг базовой длины волны  $\lambda_0 = 100$  мкм становится более выраженной, и ширина полосы пропускания стремится к нулю.



**Рисунок 2.** Зависимость коэффициента пропускания спектрального фильтра от длины волны для нулевой частоты при  $N=3$  (сплошная линия),  $N=5$  (точечная линия),  $N=7$  (пунктирная линия).

Если параметр в бесселевом пучке, падающем на спектральный фильтр будет возрастать, то пик пропускания будет смещаться. Причём смещение для ТЕ- и ТМ-поляризации будет различным [16-18]. Пропускание рассматриваемой структуры будет приводить к значительному смещению центрального пика, а также различию картин для ТЕ- и ТМ-поляризации. Данный факт свидетельствует о том, что при использовании спектрального фильтра в короткофокусной оптической системе (лучи идут под большими углами к оптической оси), будет происходить искажение пятна рассеяния и, соответственно, изображения.

## 5. Заключение

Развитая теория может быть применена для дизайна многослойных спектральных фильтров для излучения терагерцового диапазона.

## 6. Благодарность

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ № 18-07-00514.

## 7. Литература

- [1] Фурсов, В.А. Тематическая классификация гиперспектральных изображений по показателю сопряжённости / В.А. Фурсов, С.А. Бибииков, О.А. Байда // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 154-158.
- [2] Журавель, Ю.Н. Особенности обработки гиперспектральных данных дистанционного зондирования при решении задач мониторинга окружающей среды / Ю.Н. Журавель, А.А. Федосеев // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 471-476.
- [3] Гашников, М.В. Иерархическая сеточная интерполяция при сжатии гиперспектральных изображений / М.В. Гашников, Н.И. Глумов // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 87-93.
- [4] Green, R.O. Imaging spectroscopy and the airborne visible/infrared imaging spectrometer (AVIRIS) // Remote Sensing of Environment. – 1998. – Vol. 65(3). – P. 227-248.
- [5] Rickard, L.J. HYDICE: An airborne system for hyperspectral imaging // Optical Engineering and Photonics in Aerospace Sensing, 1993. – P. 173-179.
- [6] Lee, J.H. Optical Design of a Compact Imaging Spectrometer for STSAT3 / J.H. Lee, T.S. Jang, H.-S. Yang, S.-W. Rhee // Journal of the Optical Society of Korea. – 2008. – Vol. 12(4). – P. 262-268.
- [7] Бакуменко, В.Л. Новые схемы спектрометров / В.Л. Бакуменко, А.Н. Свиридов // Прикладная физика. – 1999. – № 2.
- [8] Emadi, H.W. Linear variable optical filter-based ultraviolet microspectrometer / H.W. Emadi, G. de Graaf, P. Enoksson, J.H. Correia, R. Wolffenbuttel // Applied Optics. – 2012. – Vol. 51. – P. 4308-4315.
- [9] Emadi, H.W. Design and implementation of a sub-nm resolution microspectrometer based on a Linear-Variable Optical Filter / H.W. Emadi, G. de Graaf, R. Wolffenbuttel // Optics Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 489-507.

- [10] McLeod, R.R. Improving the spectral resolution of wedged etalons and linear variable filters with incidence angle / R.R. McLeod, T. Honda // *Optics Letters*. – 2005. – Vol. 30. – P. 2647-2649.
- [11] Barnsley, M.J. The PROBA/CHRIS Mission: A Low-Cost Smallsat for Hyperspectral Multiangle Observations of the Earth Surface and Atmosphere / M.J. Barnsley, J.J. Settle, M.A. Cutter, D.R. Lobb, F. Teston // *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing*. – 2004. – Vol. 42. – P. 1512-1520.
- [12] Хонина, С.Н. Сравнительное исследование спектральных свойств асферических линз / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 363-369. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-3-363-369.
- [13] Born, M. Principles of optics / M. Born, E. Wolf – Pergamon Press, 1968.
- [14] Li, L. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings // *Journal of the Optics Society of America A*. – 1996. – Vol. 13. – P. 1024-1035.
- [15] Katsidis, C. General transfer-matrix method for optical multilayer systems with coherent, partially coherent, and incoherent interference / C. Katsidis, D.I. Siapkas // *Applied Optics*. – 2002. – Vol. 41. – P. 3978-3987.
- [16] Казанский, Н.Л. Моделирование гиперспектрометра на спектральных фильтрах с линейно-изменяющимися параметрами / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский, Ю.С. Стрелков // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 256-270.
- [17] Казанский, Н.Л. Моделирование гиперспектрометра на спектральных фильтрах с линейно-изменяющимися параметрами с использованием векторных бесселевых пучков / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 770-776.
- [18] Kazanskiy, N.L. Simulation of spectral filters used in hyperspectrometer by decomposition on vector Bessel modes / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Proc. of SPIE*. – 2015. – Vol. 9533. – P. 95330L-7. DOI: 10.1117/12.2183429.

## The operation modeling of spectral filters of the THz range using vector Bessel beams

P.V. Mokshin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** This article is devoted to modeling the operation of spectral filters based on the use of linearly varying parameters. In this paper, we estimate the size of the scattering spot depending on the parameters of the spectral filter. The results were obtained by decomposing the incident radiation into vector Bessel waves. A numerical calculation showed that a significant deterioration in resolution occurs only in the case of short-focus optical systems.