Моделирование пространственного движения космической тросовой системы с надувным баллоном, предназначенной для доставки груза на орбиту

А.С. Ледков¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается схема вывода груза с низкой околоземной орбиту на более высокую с помощью переводимой во вращение радиально ориентированной космической тросовой системы. Предполагается, что до момента стыковки космическая тросовая система находится в радиальном положении. С помощью легкой ракеты на низкую орбиту выводится груз, который пристыковывается к нижнему концу троса. После этого на стыковочном модуле надувается баллон, и тросовая система переводится во вращение за счет действия аэродинамической силы сопротивления. Целью работы является разработка математической модели, описывающей пространственное движение космической тросовой системы с надувным баллоном, и исследование влияния положения центра масс баллона на колебания системы. С помощью уравнений Лагранжа второго рода была разработана математическая модель. Результаты моделирования движения тросовой системы со сферическим надувным баллоном показали, что предлагаемая схема позволяет осуществить вывод груза на более высокую орбиту. Положение центра масс сферического баллона оказывает заметное влияние на колебания системы. Наиболее предпочтительной является компоновка, при которой центр масс баллона находится ниже его геометрического центра.

1. Введение

Задача вывода груза на орбиту является одной из наиболее важных задач космонавтики. Использование комбинированной схемы вывода груза с использованием вспомогательных космических тросовых систем позволяет снизить стоимость операции вывода груза за счет применения более легких ракет. В рамках рассматриваемой схемы груз на легкой ракете поднимается на низкую орбиту, где пристыковывается к нижнему концу космической тросовой системы. Затем он поднимается тросовой системой на более высокую целевую орбиту, где отстыковывается и продолжает свой свободный орбитальный полет. Все обсуждаемые в научной литературе способы подъема груза на более высокую орбиту с помощью космических тросов можно разделить на две группы: с помощью вращающейся или переводимой во вращение космической тросовой системы [1-4] с помощью движущегося вдоль стабилизированной тросовой системы подъемника [5-8]. В данной работе рассматривается вывод груза с помощью переводимой во вращение космической тросовой системы подъемника [5-8]. В данной работе рассматривается вывод груза с помощью переводимой во вращение космической тросовой системы подъемника [5-8]. В данной работе рассматривается вывод груза с помощью переводимой во вращение космической тросовой системы. Раскрутка тросовой системы после присоединения груза может быть осуществлена с помощью реактивных двигателей [9], за счет изменения длины троса [10], за счет взаимодействия

электродинамической тросовой системы с магнитным полем Земли [11, 12]. В статье рассматривается альтернативный способ перевода космической тросовой системы во вращения за счет использования силы аэродинамического сопротивления, действующей на нижний конец троса [13, 14].

Целью работы является разработка математической модели, описывающей пространственное движение космической тросовой системы с надувным баллоном, и исследование влияния положения центра масс баллона на колебания системы. Данное исследование продолжает цикл статей [13, 14], в которых задача рассматривалась в плоской постановке.

2. Математическая модель

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из спутника, тяжелого упругого троса и стыковочного модуля, оснащенного надувным баллоном. Будем использовать уравнения Лагранжа второго рода для построения математической модели, описывающей пространственное движение механической системы. Спутник будем рассматривать как материальную точку (точка *A* на рисунке 1), стыковочный модуль, груз и надутый баллон будем рассматривать, как единое твердое тело с центром масс в точке *P*. Точкой *B* обозначим точку крепления троса к поверхности тела. Трос будем рассматривать, как однородный упругий стержень.



Рисунок 1. Космическая тросовая система.

Введем в рассмотрение системы координат. Центр инерциальной системы координат $OX_pY_pZ_p$ совпадает с центром Земли. Ось OX_p лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку весеннего равноденствия, ось OZ_p направлена по оси вращения Земли, ось OY_p дополняет систему до правой. Центр орбитальной системы координат $Cx_oy_oz_o$ совпадает с центром масс системы, ось Cx_o направлена по радиусу вектору, ось Cz_o направлена по вектору кинетического момента **h** точки *C* относительно точки *O*, ось Cy_o лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону полета. Система координат $Cx_ty_tz_t$ связана с тросом. Ось Cx_t направлена вдоль троса. Система координат $Px_by_bz_b$ связана с телом. Оси Px_b , Py_b и Pz_b являются главными центральными осями инерции тела (рисунок 2).

Состояние механической системы описывается девятью обобщенными координатами: расстоянием от центра Земли до центра масс системы r = OC, длиной троса l = AB, углами φ_1 , φ_2 , которые задают ориентацию орбитальной системы координат $Cx_o y_o z_o$ относительно инерциальной $OX_p Y_p Z_p$, углами φ_3 , φ_4 , которые задают ориентацию связанной с тросом системы координат $Cx_t y_t z_t$ относительно орбитальной системы $Cx_o y_o z_o$ (рисунок 1), углами

 φ_5 , φ_6 и φ_7 , которые задают ориентацию связанной с телом системы координат $Px_b y_b z_b$ относительно орбитальной системы $Cx_o y_o z_o$ (рисунок 2).



Рисунок 2. Взаимное расположение орбитальной и связанной систем координат.

Для перевода координат векторов из одной системы в другую будем использовать матрицы перехода $[A_i^i]$:

$$[x_{j}, y_{j}, z_{j}]^{T} = [A_{j}^{i}][x_{i}, y_{i}, z_{i}]^{T}.$$
(1)

Ниже приведены матрицы перехода

$$\begin{bmatrix} A_{p}^{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1}c_{2} & -s_{1} & -c_{1}s_{2} \\ s_{1}c_{2} & c_{1} & -s_{1}s_{2} \\ s_{2} & 0 & c_{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{o}^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{3}c_{4} & -s_{3} & -c_{3}s_{4} \\ s_{3}c_{4} & c_{3} & -s_{3}s_{4} \\ s_{4} & 0 & c_{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{b}^{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{7} & c_{6}s_{7} & s_{6}s_{7} \\ -s_{7} & c_{6}c_{7} & s_{6}c_{7} \\ 0 & -s_{6} & c_{6} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{b}^{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{5}c_{7} - s_{5}c_{6}s_{7} & -c_{5}s_{7} - s_{5}c_{6}c_{7} & s_{5}s_{6} \\ s_{5}c_{7} + c_{5}c_{6}s_{7} & -s_{5}s_{7} + c_{5}c_{6}c_{7} & -c_{5}s_{6} \\ s_{6}s_{7} & s_{6}c_{7} & c_{6} \end{bmatrix},$$

где $c_i = \cos \varphi_i$, $s_i = \sin \varphi_i$.

Кинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$T = T_A + T_B + T_T, (2)$$

где T_A - кинетическая энергия спутника, T_B - кинетическая энергия тела, T_T - кинетическая энергия троса:

$$T_A = \frac{1}{2} m_A \dot{\mathbf{r}}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_A, \quad T_B = \frac{1}{2} m_B \dot{\mathbf{r}}_P \cdot \dot{\mathbf{r}}_P + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T [\mathbf{I}_B] \boldsymbol{\omega}_B, \quad T_T = \frac{1}{2} m_T \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \dot{\mathbf{r}}_T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_T^T [\mathbf{I}_T] \boldsymbol{\omega}_T, \quad (3)$$

где m_A - масса спутника, m_B - масса тела, m_T - масса троса, \mathbf{r}_A - радиус вектор спутника, \mathbf{r}_B - радиус вектор центра масс тела, \mathbf{r}_T - радиус вектор центра масс троса, $\boldsymbol{\omega}_B$ - вектор угловой скорости тела, заданный в связанной системе координат $Px_by_bz_b$, $\boldsymbol{\omega}_T$ - вектор угловой скорости троса, заданный в связанной с тросом системе координат $Dx_ty_tz_t$, точка D – центр масс троса, $[\mathbf{I}_B]$ - тензор инерции тела, $[\mathbf{I}_T]$ - тензор инерции троса

$$[I_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_T l^2 / 12 & 0 \\ 0 & 0 & m_T l^2 / 12 \end{bmatrix}, \quad [I_B] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix},$$
(4)

 I_x , I_y , I_z - главные моменты инерции тела. Радиус векторы точек могут быть найдены как

$$\mathbf{r}_{A} = [A_{p}^{o}]\mathbf{r}_{C}^{o} + [A_{p}^{t}]\mathbf{\rho}_{A}^{t}, \quad \mathbf{r}_{P} = [A_{p}^{o}]\mathbf{r}_{C}^{o} + [A_{p}^{t}]\mathbf{\rho}_{B}^{t} - [A_{p}^{b}]\mathbf{\rho}_{PB}^{b}, \quad \mathbf{r}_{T} = [A_{p}^{o}]\mathbf{r}_{C}^{o} + [A_{p}^{t}]\mathbf{\rho}_{D}^{t}, \quad (5)$$

где $[A_p^t] = [A_p^o][A_o^t], \quad [A_p^b] = [A_p^o][A_o^b], \quad \mathbf{r}_C^o = [r, 0, 0]^T, \quad \boldsymbol{\rho}_A^t = [AC, 0, 0]^T, \quad \boldsymbol{\rho}_B^t = [-BC, 0, 0]^T,$ $\boldsymbol{\rho}_D^t = [CD, 0, 0]^T, \quad \boldsymbol{\rho}_{BB}^b = [x_p, y_p, z_p]^T$ - радиус вектор точки крепления троса в связанной с телом системе координат. Верхние индексы в векторах обозначают системы координат, в которых заданы компоненты этих векторов. Входящие в вектора расстояния могут быть найдены как

$$AC = \frac{l(2m_B + m_T)}{2m}, \quad BC = \frac{l(2m_A + m_T)}{2m}, \quad CD = \frac{l(m_B - m_A)}{2m}, \tag{6}$$

где $m = m_A + m_B + m_T$ - масса всей системы. При вычислении расстояний до центра масс было сделано предположение, что точка *В* и *Р* совпадают, поскольку *BP* << *l*. Для угловых скоростей запишем

$$\boldsymbol{\omega}_{B} = [A_{b}^{p}]\boldsymbol{\omega}_{1}^{p} + [A_{b}^{o}](\boldsymbol{\omega}_{2}^{o} + \boldsymbol{\omega}_{5}^{o}) + [A_{b}^{5}]\boldsymbol{\omega}_{6}^{5} + \boldsymbol{\omega}_{7}^{b}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{T} = [A_{t}^{p}]\boldsymbol{\omega}_{1}^{p} + [A_{t}^{o}](\boldsymbol{\omega}_{2}^{o} + \boldsymbol{\omega}_{3}^{o}) + \boldsymbol{\omega}_{4}^{t}, \tag{7}$$

вектора угловых скоростей показаны на рисунках 1 и 2, а их модули вычисляются, как $\omega_i = \dot{\varphi}_i$. Потенциальная энергия системы Π складывается из потенциальной энергии спутника Π_A , тела Π_B и троса Π_T в центральном гравитационном поле Земли и потенциальной энергии упруго деформированного троса Π_c

$$\Pi = \Pi_A + \Pi_B + \Pi_T + \Pi_c \,. \tag{8}$$

Эти слагаемые могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{A} &= -\frac{\mu m_{A}}{r_{A}}, \qquad \Pi_{T} = -\int_{-BC}^{AC} \frac{\mu m_{T}}{l\sqrt{r^{2} + 2rs\cos\varphi_{3}\cos\varphi_{4} + s^{2}}} ds, \qquad \Pi_{c} = \frac{c}{2}(l - l_{0})^{2}, \\ \Pi_{B} &= -\frac{\mu m_{A}}{r_{P}} - \frac{\mu(I_{x} + I_{y} + I_{z})}{2r_{P}^{3}} + \frac{3\mu(a_{11}x_{P}^{o} + a_{12}y_{P}^{o} + a_{13}z_{P}^{o})^{2}I_{x}}{2r_{P}^{5}} + \\ &+ \frac{3\mu(a_{21}x_{P}^{o} + a_{22}y_{P}^{o} + a_{23}z_{P}^{o})^{2}I_{y}}{2r_{P}^{5}} + \frac{3\mu(a_{31}x_{P}^{o} + a_{32}y_{P}^{o} + a_{33}z_{P}^{o})^{2}I_{z}}{2r_{P}^{5}}, \end{aligned}$$
(9)

где a_{ij} - компоненты матрицы перехода $[A_o^b]$, l_0 - длина недеформированного троса, x_P^o , y_P^o , z_P^o - координаты вектора **r**_P в орбитальной системе координат.

Уравнения Лагранжа второго рода могут быть записаны в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,\tag{10}$$

где $L = T - \Pi$ - функция Лагранжа, q_i - обобщенная координата, Q_i - обобщенная непотенциальная сила. В рассматриваемом случае на тело действует непотениальная аэродинамическая сила, имеющая в связанной системе координат компоненты F_x^b , F_y^b , F_z^b и приложенная в центре давления K, положение которого зависит от параметров потока, ориентации тела и может быть задано в связанной системе координат вектором $\overline{PK} = \mathbf{\rho}_K^b = [x_K^b, y_K^b, z_K^b]^T$. Обобщенные координаты могут быть найдены как

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_K}{\partial q_i}, \qquad (11)$$

Уравнения (10) с учетом сил (11) описывают пространственное движение космической тросовой системы с учетом влияния атмосферы на прикрепленное к тросу тело.

3. Результаты численного моделирования

Рассмотрим для примера движение космической тросовой системы со следующими массовогеометрическими параметрами: $m_A = 6000$ кг, $m_B = 250$ кг, $m_T = 155$ кг, c = 10 H·м, $l_0 = 50$ км, AC = 2557 м, BC = 47443 м. Пусть в начальный момент времени система находилась в состоянии, описываемом следующими параметрами: $r_0 = 6531000$ м, $\dot{r}_0 = 0$, $l_0 = 50006$ м, $\dot{l}_0 = 0$, $\phi_{10} = \phi_{20} = \phi_{30} = \phi_{40} = \phi_{50} = \phi_{70} = 0$, $\dot{\phi}_{20} = \dot{\phi}_{30} = \dot{\phi}_{40} = \dot{\phi}_{50} = \dot{\phi}_{70} = 0$, $\dot{\phi}_{10} = 1.196 \cdot 10^{-3}$ рад/с, $\phi_{60} = \pi / 2$. Будем считать, что надутый баллон «обволакивает» пристыковынный груз и он оказывается внутри. Таким образом, присоединенное к нижнему конце троса тело, состоящее из баллона, груза и стыковочного модуля, имеет сферическую форму. Его радиус составляет $R_b = 3.5$ м, при этом центр масс тела смещен от геометрического центра сферы к точке крепления троса на расстояние x_c . В этом случае $x_p = -R_b + x_c$ м, $y_p = z_p = 0$. Для тела сферической формы центр давления совпадает с геометрическим центром сферы, поэтому $x_K^b = -x_c$ м, $y_K^b = z_K^b = 0$. Сила аэродинамического сопротивления, действующая на сферу может быть найдена как

$$\mathbf{F}^{b} = -C_{x} \frac{\rho V_{P}^{2}}{2} S \frac{\mathbf{V}_{P}^{b}}{|\mathbf{V}_{P}^{b}|} = -C_{x} \frac{\rho V_{P}}{2} \pi R_{b}^{2} \mathbf{V}_{P}^{b}, \qquad (12)$$

где $C_x = 1$ - коэффициент лобового сопротивления сферы, ρ - плотность атмосферы на расстоянии r_p от центра Земли. Исследуем влияние положения центра масс x_c на колебания системы. Рассмотрим в качестве примера три конфигурации, когда $x_c = -1.5$ м, $x_c = 0$ и $x_c = 1.5$ м. Из рисунка 3 видно, в результате действия атмосферы во всех трех случаях происходит разворот космической тросовой системы, то есть операция вывода груза на более высокую орбиту за счет перевода во вращение космической тросовой системы может быть реализована. При этом, положение центра масс прикрепленного к тросу тела существенно влияет на его колебания. Наиболее предпочтительной является ситуация, когда центр масс находится ниже геометрического центра сферического баллона, поскольку в этом случае амплитуда колебаний меньше по сравнению со случаем, когда центр масс находится между геометрическим центром и точкой крепления троса. Расчеты показывают, что во всех рассмотренных случаях движение системы остается плоским, то есть $\varphi_2(t) = \varphi_4(t) = \varphi_7(t) =$, $\varphi_6(t) = \pi/2$. В процессе движения провисания троса не происходит и он все время остается натянутым (рисунок 4).



Рисунок 4. Зависимость отклонения длины троса от длины недеформированного состояния.

Рассмотрим влияние разворота космической тросовой системы за счет аэродинамических сил на параметры орбиты ее центра масс для случая $x_c = -1.5$ м. На рисунке 5 показа

зависимость радиуса орбиты центра масс космической тросовой системы и ее фокального параметра от времени. Полученные данные согласуются с результатами, приведенными в [14].



Рисунок 5. Изменение радиуса орбиты центра масс космической тросовой системы и ее фокального параметра.

В случае, когда центр масс тела находится не в плоскости орбиты, колебания системы перестают быть плоскими. Проведем моделирование движения при $x_c = -1.5$ м, $\varphi_{70} = 0.1$ рад. На рисунке 6 показана зависимость угла отклонения троса φ_4 . Видно, что колебания тела вызывают внеплоскостные колебания троса. Зависимость, задающих положение связанной с телом системы координат относительно орбитальной системы, показаны на рисунке 7.







Рисунок 7. Зависимость углов φ_5 , φ_6 , φ_7 .

Таким образом, показано, что описанная механическая система может переводиться во вращение за счет действия на нее аэродинамических сил. Пространственные колебания прикрепленного к тросу тела могут носить сложный характер, но они оказывают слабое влияние на колебания троса.

4. Заключение

Исследовано пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для вывода груза на орбиту. С помощью уравнений Лагранжа второго рода разработана математическая модель, учитывающая воздействие аэродинамических сил на прикрепленный к тросу надувной баллон. Результаты численного моделирования показали, что рассматриваемая

космическая тросовая система может быть переведена из радиального положение во вращение за счет действия аэродинамических сил на нижний конец троса. Пространственные колебания прикрепленного к тросу тела оказывают слабое влияние на колебания троса. Исследовано влияние положения центра масс баллона на колебания троса. Показано, что наиболее предпочтительной является ситуация, когда центр масс находится ниже геометрического центра сферического баллона, поскольку в этом случае амплитуда колебаний баллона меньше по сравнению со случаем, когда центр масс находится между геометрическим центром и точкой крепления троса.

5. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-31-20058.

6. Литература

- [1] Ziegler, S.W. Using motorized tethers for payload orbital transfer / S.W. Ziegler, M.P. Cartmell // Journal of Spacecraft and Rockets. 2001. Vol. 38(6). P. 904-913.
- [2] Hoyt, R.P Cislunar tether transport system / R.P. Hoyt, C. Uphoff // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2000. – Vol. 37(2). – P. 177-186.
- [3] Murray, C. Moon-tracking orbits using motorized tethers for continuous earth-moon payload exchanges / C. Murray, M.P. Cartmell // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2013. – Vol. 36(2). – P. 567-576.
- [4] Lu, H. Application of spinning electrodynamic tether system in changing system orbital parameters / H. Lu, Y.M. Zabolotnov, A. Li // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1368(4). – P. 042002. DOI: 10.1088/1742-6596/1368/4/042002.
- [5] Burov, A.A. On periodic motions of an orbital dumbbell-shaped body with a cabin-elevator / A.A. Burov, I.I. Kosenko, H. Troger // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47(3). – P. 269-284.
- [6] Williams, P. Climber motion optimization for the tethered space elevator / P. Williams, W. Ockels // Acta Astronautica. 2010. Vol. 66(9-10). P. 1458-1467.
- [7] Aslanov, V.S. Dynamics of Reusable Tether System with Sliding Bead Capsule for Deorbiting Small Payloads / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // Journal of Spacecraft and Rockets. - 2018. -Vol. 55(6). - P. 1519-1527.
- [8] Li, G. Three-Dimensional High-Fidelity Dynamic Modeling of Tether Transportation System with Multiple Climbers / G. Li, G. Shi, Z.H. Zhu // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2019. P. 1-15.
- [9] Guang, Z. Optimal deployment of spin-stabilized tethered formations with continuous thrusters / Z. Guang, B. Xingzi, L. Bin // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 95(3). P. 2143-2162.
- [10] Aslanov, V.S. Swing principle in tether-assisted return mission from an elliptical orbit / V.S. Aslanov, A.S. Ledkov // Aerospace Science and Technology. – 2017. – Vol. 71. – P. 156-162.
- [11] Ван, Ч. Применение метода усреднения для прогноза движения и управления электродинамической тросовой системой наноспутников / Ч. Ван, Ю.М. Заболотнов, П.С. Воеводин // Сборник трудов V международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ) – Самара: Новая техника, 2019. – Т. 3. – С. 313-322.
- [12] Лу, Х. Перевод электродинамической космической тросовой системы во вращение с помощью скользящего режима управления / Х. Лу, А. Ли, Ю.М. Заболотнов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды XXI Международной конференции. – Самара: ООО "Офорт", 2019. – С. 515-521.
- [13] Ледков, А.С. Использование надувного баллона в задаче вывода груза на орбиту с помощью тросовой системы / А.С. Ледков, М.К. Жаринов // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. –Т. 23, № 4. С. 1-18.
- [14] Ледков, А.С. Математическое моделирование движения космической тросовой системы с надувным шаром-баллоном при выводе космического аппарата на орбиту / А.С. Ледков, Р.Г. Соболев // Вестник Томского государственного университета. – 2018. – № 52. – С. 63-74.

Modeling the spatial motion of a space tether system with an inflatable balloon for raising payload orbit

A.S. Ledkov¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The scheme of raising payload from a low Earth orbit to a higher one using a space tether system, which translates into rotation, is considered. It is assumed that initially the space tether system is in a stable radial position. The payload is launched into a low orbit by a light rocket, where it is docked to a special module at the lower tether end. After docking, a balloon, which envelops the payload, is inflated by the module, and the tether system is put into rotation due to the action of aerodynamic drag. The aim of the work is to develop a mathematical model that describes the spatial motion of the space tether system with the inflated balloon and to analyze the influence of the balloon's center of mass position on the oscillations of the system. The mathematical model was developed using Lagrange formalism. The results of numerical simulation of the system motion with a spherical balloon showed that the considered scheme of payload lifting can be implemented. The position of the balloon center of mass is below the geometric center of the balloon.