

# Моделирование нейронных систем и сетей функционально-дифференциальными уравнениями

В.А. Ермолаев<sup>1</sup>, Ю.А. Кропотов<sup>1</sup>, А.Ю. Проскуряков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Муромский институт (филиал) ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», Орловская, Муром, Россия, 602264

**Аннотация.** В статье рассматриваются модели нейронных систем в виде функционально-дифференциальных уравнений, моделей с распределенным запаздыванием, полученных путем обобщения соответствующих им систем с дискретным запаздыванием, описываемых дифференциально-разностными уравнениями. Показано, что подобное обобщение позволяет, при сохранении всех возможностей моделей с дискретным запаздыванием в части имитации характерных для нейронных сетей автоколебаний, придать последним более адекватный действительности характер. Это подтверждено результатами моделирования системы Хатчинсона с распределенным запаздыванием средствами Matlab, показавшими наличие зависимости периода и характера автоколебаний от параметров модели и, следовательно, реализуемость режимов пачечной и одиночной передачи нервных импульсов. Показаны возможности систем с распределенным запаздыванием в цепи обратной связи, обусловленные множественностью путей распространения возмущений, как в межнейронной среде, так и по соединениям сети. В ходе моделирования рассмотрено распределение запаздывания, аппроксимированное многочленом второго порядка по системе независимых экспоненциальных функций.

## 1. Введение

Механизмам процессов, протекающих в нейронных сетях живых организмов, и их моделям посвящено огромное множество работ. Здесь можно сослаться на перечни литературы, приведенные в обзорах [1, 2], в части касающейся соответствия наблюдаемых данных используемым моделям. Аналогичная ситуация сложилась и в части математической теории известных моделей, привлекая к себе в последние годы особое внимание в связи с возникшим интересом к так называемым осцилляционным моделям – моделям, состоящим из совокупности объединенных в единое целое осцилляторов, имитирующих работу нейронов. Здесь суммировались интересы в области релаксационных автоколебаний [3, 4], а в последнее время и систем с запаздыванием [5], с интересом к процессам, описываемым уравнениями экологического типа (например, [6 – 9]) – уравнениями, по преимуществу, дифференциально-разностного типа.

В соответствии с названием статьи, целью настоящей работы являются, конечно, не дифференциально-разностные модели, а модели функционально-дифференциального типа – модели с распределенным запаздыванием, которые могут быть получены посредством соответствующего обобщения моделей с дискретным запаздыванием. Конечно, если по теории

уравнений с распределенным запаздыванием тоже существует большая литература, например, [10, 11], то по ее применению, особенно в области нейронных сетей, известно не очень много, например, по монографии [12].

## 2. Модели нейронных систем с дискретным запаздыванием

Первая, приводимая ниже модель, пригодная для указанного обобщения, модель, предложенная Хатчинсоном и названная его именем, описывается базовым экологическим уравнением, которому можно придать вид:

$$\dot{u}(t) = \lambda[1 - u(t - \tau)]u(t), \quad (1)$$

где  $\tau$  – величина дискретного запаздывания, а  $\lambda = \text{const} > 0$  – параметр модели.

Обобщая, это уравнение можно также записать в виде:

$$\dot{u}(t) = \lambda f(u(t - \tau))u(t), \quad (2)$$

где  $f(x)$  – некоторая заданная функция. Каждой такой функции соответствует при этом свое обобщенное уравнение Хатчинсона. Так, функции

$$f(x) = (1 - x)/(1 + cx), \quad c = \text{const} > 0,$$

отвечает уравнение:

$$\dot{u}(t) = \frac{1 - \exp(u(t - \tau)/\varepsilon)}{1 + c \exp(u(t - \tau)/\varepsilon)}, \quad \varepsilon = 1/\lambda \ll 1.$$

К классу, описываемому уравнением (2), относится и модель, введенная, как отмечается в ряде работ, В.В. Майоровым и И.Ю. Мышкиным. Этой модели отвечает уравнение

$$\dot{u}(t) = \lambda[f_2(u(t - \tau)) - f_1(u(t)) - 1]u(t), \quad (3)$$

где функции  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  представляют соответственно натриевую и калиевую проводимости мембраны нейрона. Подобная, относящая к классу (3), модель, имитирующая, в частности, динамику и механизм взаимодействия нейронов, часто представляют уравнением

$$\dot{u}(t) = -u(t) + A \text{th}(u(t)) + B \text{th}(u(t - \tau)). \quad (4)$$

Похожим способом, при двух запаздываниях, вводятся функция

$$f(u(t - \tau_1), u(t - \tau_2), \alpha) = -(\alpha u(t - \tau_1) + (1 - \alpha)u(t - \tau_2))(1 + 1/u(t)), \quad \alpha \in [0, 1],$$

и соответствующее ей обобщенное уравнение Хатчинсона

$$\dot{u}(t) = -\lambda(\alpha u(t - \tau_1) + (1 - \alpha)u(t - \tau_2))(1 + u(t)).$$

Помимо различных обобщений базовой модели Хатчинсона, на практике часто встречаются модели с запаздывающей обратной связью, потребность в которых в области нейронных сетей возникает, в частности, по причине конечной скорости распространения возмущений по межнейронным соединениям, образующим цепь обратной связи. Конечно, потребность в моделях с запаздыванием в цепях обратной связи присуща не только нейронным сетям, но и другим областям, подобным, например, области систем с акустической обратной связью [15-17].

Модель системы с запаздыванием в цепи обратной связи представляют в ряде работ уравнением, линейным при разомкнутой обратной связи:

$$\ddot{u}(t) + \lambda \dot{u}(t) + u(t) = (\varepsilon - u^2(t - \tau))\dot{u}(t - \tau).$$

При замкнутой обратной связи это уравнение становится, конечно, нелинейным.

Используется также модель генератора Ван дер Поля, охваченного запаздывающей обратной связью. Уравнение этой модели имеет при этом вид:

$$\ddot{u}(t) - (\alpha - u^2(t))\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \gamma u^3(t) = \omega_0^2 k u(t - \tau).$$

Нетрудно показать, что приведенные выше уравнения не охватывают всех возможных моделей с дискретным запаздыванием в цепях обратной связи. Тем более это очевидно при переходе от них к обобщенным моделям с распределенным запаздыванием, обеспечиваемым, в

принципе, преобразованием  $u(t - \tau) \rightarrow \int_{\tau_0}^{\tau_a} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$ .

### 3. Функционально-дифференциальные модели

Полученную из модели Хатчинсона (1) систему с распределенным запаздыванием можно задать функционально-дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{u}(t) = \lambda \left[ 1 - \int_{-\tau_a}^{-\tau_0} u(t+\tau) dg(t;\tau) \right] u(t) + y(t), \text{ где } \tau_a > \tau_0 \geq 0 \text{ и } \tau \in [-\tau_a, -\tau_0]. \quad (5)$$

Здесь  $g(t, \tau)$  – ядро интеграла Стильтьеса, а  $y(t)$  – входное воздействие.

Если функция  $g(t, \tau)$  не зависит от аргумента  $t$ , т.е.  $g(t, \tau) \equiv g(\tau)$ , и дифференцируема по переменной  $\tau$ , так что  $\dot{g}(\tau) = h(\tau)$ , то уравнение (5) можно записать в виде:

$$\dot{u}(t) = \lambda \left[ 1 - \int_{\tau_0}^{\tau_a} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] u(t) + y(t), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_a]. \quad (6)$$

На интервале  $t \in [0, \tau_0]$  решение уравнения (6) методом шагов находится по известной начальной функции  $\varphi_1(\tau) = u(\tau)$ , заданной на интервале  $\tau \in [-\tau_a, -\tau_0]$ . Аналогично, решение уравнения на интервале  $t \in [\tau_0, 2\tau_0]$  находится по функции  $\varphi_2(\tau) = u(\tau)$ , заданной на интервале  $\tau \in [-\tau_a + \tau_0, 0]$ . Вообще, решение на интервале  $t \in [(k-1)\tau_0, k\tau_0]$  находится по функции  $\varphi_k(\tau) = u(\tau)$ , заданной на интервале  $\tau \in [-\tau_a + (k-1)\tau_0, (k-2)\tau_0]$ .

Пусть  $\tau_0$  – минимальная величина запаздывания, кратная некоторому периоду ее дискретизации  $T_d$ , так что  $v = \tau_0/T_d$  – целое число и  $\tau_0 = vT_d$ , а верхний предел интегрирования кратен  $\tau_0$ , т.е.  $\tau_a = m\tau_0 = mvT_d$ . Положим также, что функция распределения запаздывания  $h(\tau)$  по величине, определенная на интервале  $\tau \in [\tau_0, m\tau_0]$ , вне этого интервала равняется нулю, т.е.  $h(\tau) = 0$ , если  $\tau \notin (\tau_0, m\tau_0)$ . Уравнение (6) при этом записывается как

$$\dot{u}(t) = \lambda \left[ 1 - \int_{\tau_0}^{m\tau_0} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] u(t) + y(t), \quad t \in [(k-1)\tau_0, k\tau_0], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

Если, кроме того, посредством замены  $t \rightarrow (k-1)\tau_0 + t$  ввести дискретно-непрерывное время и функцию  $u_k(t-\tau) \leftarrow u((k-1)\tau_0 + t - \tau)$ , где  $t \in [0, \tau_0]$ , то уравнение (7) становится эквивалентным последовательности дифференциальных уравнений на интервалах  $[(k-1)\tau_0, k\tau_0]$ :

$$\dot{u}_k(t) = \lambda \left[ 1 - \int_{\tau_0}^{m\tau_0} h(\tau) u_k(t-\tau) d\tau \right] u_k(t) + y_k(t), \quad t \in [0, \tau_0], \quad \tau \in [\tau_0, m\tau_0], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

при начальных условиях  $u_k(0) = u_{k-1}(\tau_0)$ .

Если ввести коэффициент

$$a_k(t) = 1 - \int_{\tau_0}^{m\tau_0} h(\tau) u_{k-1}(t-\tau) d\tau, \quad (9)$$

то уравнение (8) на интервале  $[(k-1)\tau_0, k\tau_0]$  принимает вид:

$$\dot{u}_k(t) = \lambda a_k(t) u_k(t) + y_k(t), \quad t \in [(k-1)\tau_0, k\tau_0], \quad (10)$$

Введем функцию  $A_k(s) = \int_0^s a_k(\theta) d\theta$ ,  $s \in [0, \tau_0]$ . Тогда решение уравнения (10) дается, как известно, формулой

$$u_k(t) = \left( u_{k-1}(\tau_0) + \int_0^t y_k(s) \exp(-\lambda A_k(s)) ds \right) \exp(\lambda A_k t) \quad (11)$$

$$\text{или } u_k(t) = \left( u_{k-1}(\tau_0) + \int_0^t y_k(s) \exp\left(-\lambda \int_0^s a_k(\theta) d\theta\right) ds \right) \exp\left(\lambda \int_0^t a_k(\theta) d\theta\right).$$

При этом первое слагаемое в (11), – это рекуррентная формула

$$u_k(t) = u_{k-1}(\tau_0) \exp\left(\lambda \int_0^t a_k(\theta) d\theta\right), \quad (12)$$

дающая решение сопряженного с (10) однородного уравнения, т.е. автономной системы.

Функцию распределения запаздывания по величине  $h(\tau)$  можно ввести, основываясь на тех или иных соображения, любым подходящим способом; например, посредством аппроксимации по системе степенных или экспоненциальных функций или таблично. Ниже изучение зависимости динамики автоколебаний автономной системы от распределения запаздывания осуществляется с использованием функции

$$h(\tau) = \begin{cases} (1/h_*) (1 - e^{-dp(\tau-\tau_0)}) e^{-dq(\tau-\tau_0)} = (1/h_*) (e^{-dq(\tau-\tau_0)} - e^{-d(q+p)(\tau-\tau_0)}), & \tau \in [\tau_0, m\tau_0] \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, m\tau_0] \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $\tau_* = \arg \max_{\tau \in [\tau_0, m\tau_0]} (1 - e^{-dp(\tau-\tau_0)}) e^{-dq(\tau-\tau_0)} = \tau_0 + \frac{1}{dp} \ln(1+x)$  – точка, в которой функция (13) достигает своего максимального значения, где  $x = p/q$ . При этом величина максимума функции оказывается равной единице, если принять, что нормирующий множитель  $h_*$  функции равен  $h_* = (1 - e^{-dp(\tau_*-\tau_0)}) e^{-dq(\tau_*-\tau_0)} = x(1+x)^{-\frac{1+x}{x}}$ .

Отсюда следует, что увеличение параметра модели  $d$ , не влияя на величину нормирующего множителя  $h_*$ , только смещает точку максимума распределения запаздывания к началу координат, увеличивает скорость его нарастания и спада и, соответственно, изменяет динамику автономной системы, описываемой уравнением (10) и представленной решением (12).

Графики распределений запаздывания (11) и процессов, формируемых автономной системой, изображены на рисунках 1 и 2 при различных значениях  $d$ , где принято, что минимальная величина запаздывания  $\tau_0 = 2$  ms, период дискретизации  $T_0 = \tau_0 / \nu$ , параметр  $\nu = 500$ ,  $p = 0.55$  и  $x = 2$ .

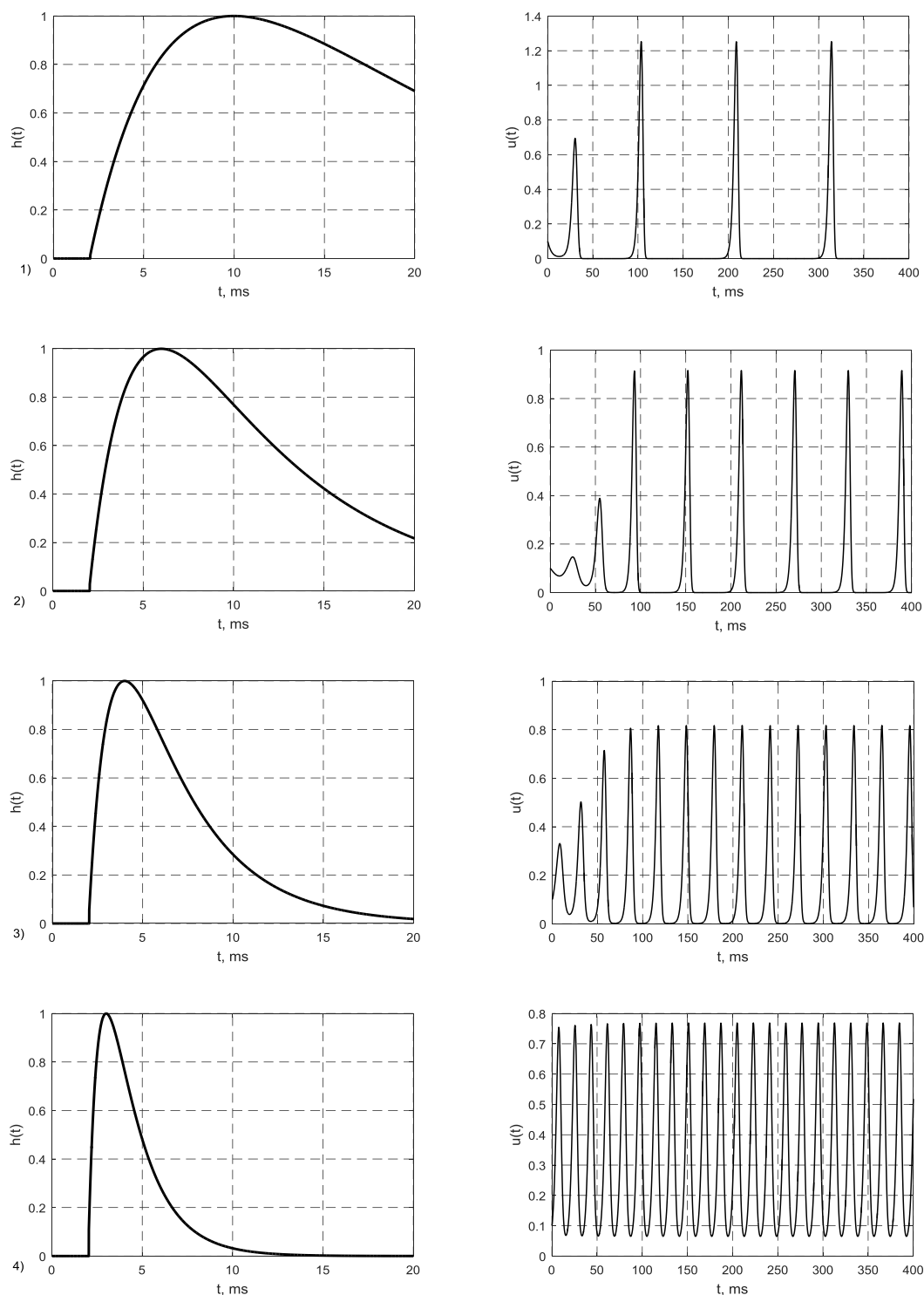
На рисунке 1 показаны автоколебания, имеющие релаксационный характер.

На рисунке 2 показаны автоколебания, приближающиеся к гармоническому виду. Динамика регулирующего параметра (9) показана на рисунке 3.

При этом параметр  $q = 0.275$ , а нормирующий множитель  $h_* = 0.385$ . Глубина памяти прошлых значений принимается равной 20 ms.

Рассмотрение приведенных на рисунке 1 графиков показывает наличие четко выраженной зависимости периода автоколебаний модели от величины параметра  $d$ , задающего координату точки, в которой функция распределения запаздывания достигает своего максимального значения, а также определяющего форму графика этого распределения. Здесь следует отметить, что с приближением параметра  $d$  к значению  $d = 2$  автоколебания теряют свой релаксационный характер. Графики, приведенные на рисунке 2 показывают, что дальнейшее увеличение параметра  $d$  придает автоколебаниям гармонический характер и даже приводит к их исчезновению (приводит модель в состояние равновесия).

Учитывая это можно заключить, что посредством скачкообразной модуляции параметра  $d$  можно симитировать пачечный режим формирования импульсов возбуждения, режим, характерный для нейронных сетей живых организмов. Конечно, здесь следует иметь в виду модуляцию, обусловленную как многочастотной динамикой самого нейрона, так и взаимосвязями, существующими в модели нейронной сети.



**Рисунок 1.** Распределение запаздывания и релаксационные автоколебания: 1)  $d = 0.25$ , 2)  $d = 0.5$ , 3)  $d = 1.0$ , 4)  $d = 2.0$ .

Следует также отметить, что представленная на рисунке 3 динамика регулирующего параметра модели  $a(t)$ , как и ожидалось, хорошо коррелирует с графиками процессов, показанных на рисунке 1.

Аналогичным способом обобщаются и другие, приведенные в первом разделе, дифференциально-разностные модели нейронных сетей. Как и в случае модели Хатчинсона,

они вполне могут быть решены методом шагов. Здесь остановимся только на моделях с запаздывающей обратной связью, представленных рисунке 4. Подобные модели рассмотрены, например, в работах [13, 14].

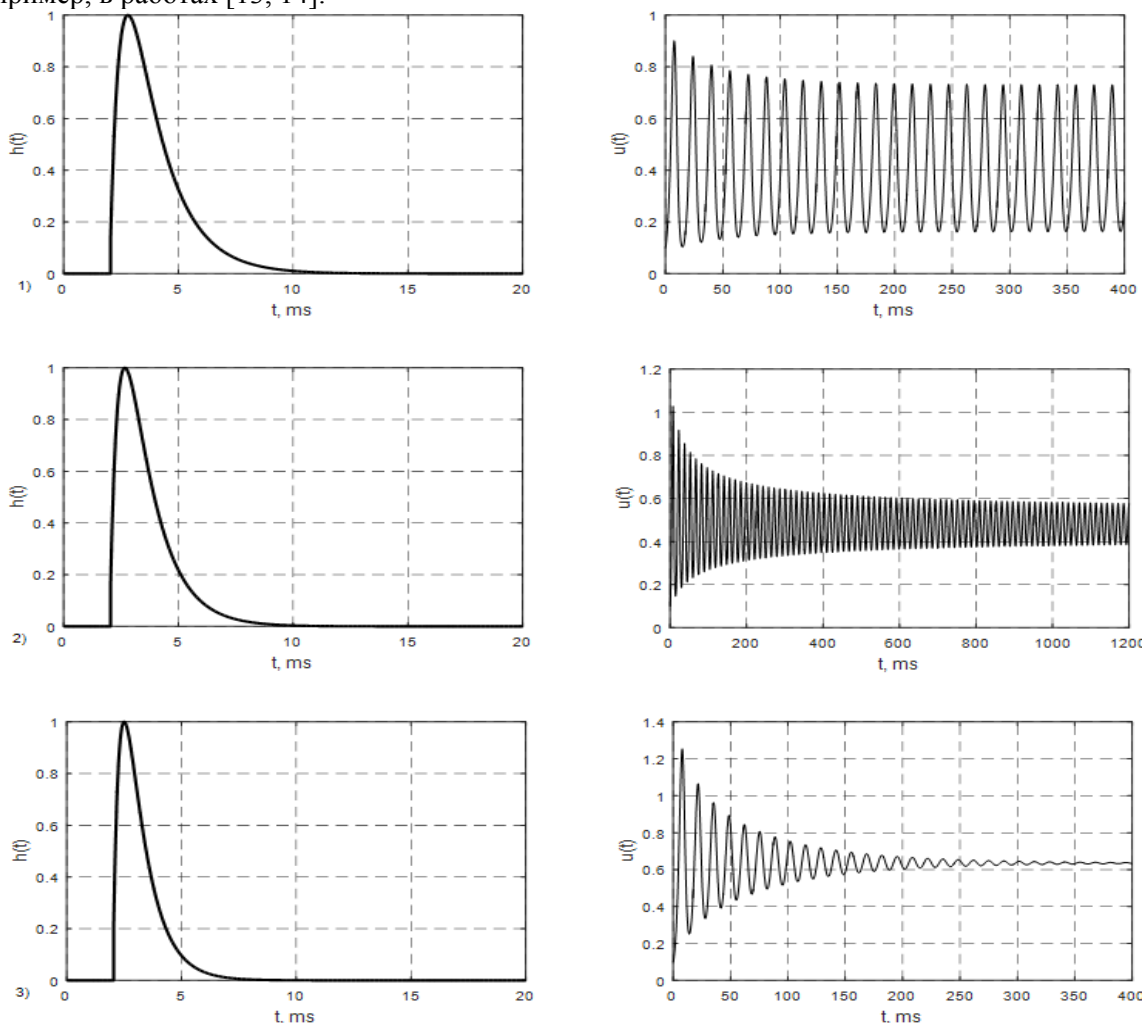


Рисунок 2. Распределенное запаздывание и автоколебания: 1)  $d = 2.5$ , 2)  $d = 3.0$ , 3)  $d = 4.0$ .

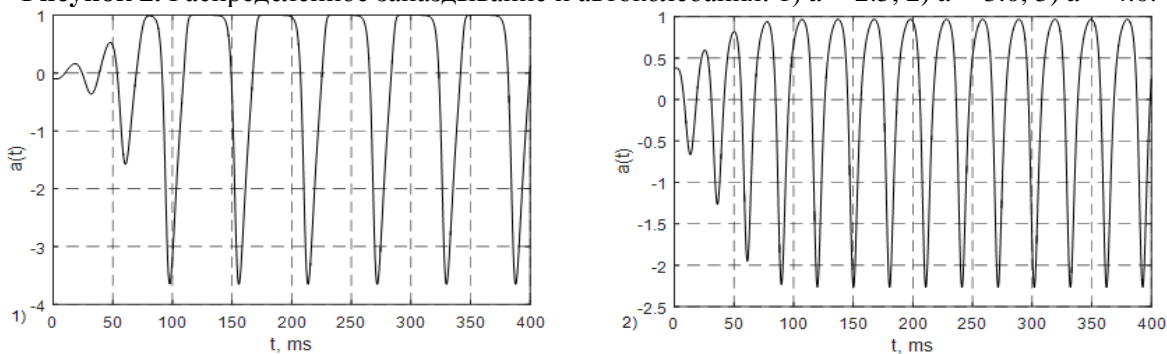


Рисунок 3. Динамика регулирующего параметра  $a(t)$  при значениях: 1)  $d = 0.5$ , 2)  $d = 1.0$ .

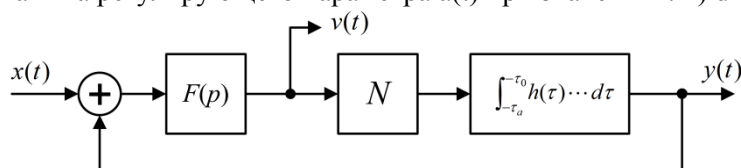


Рисунок 4. Система с распределенным запаздыванием в цепи обратной связи.

Модель, изображенная на рисунке 4, обязана своим применением множественности путей межнейронной и сетевой передачи возмущений, обуславливающей распределенный характер обратной связи, охватывающей нейроны. Символ  $F(p)$ ,  $p = d/dt$ , на этом рисунке представляет, в общем случае, нелинейный дифференциальный оператор,  $N$  – это, в частности, безынерционный нелинейный элемент, а  $\int_{-\tau_0}^{-\tau_a} h(\tau) \dots d\tau$  – элемент распределенного запаздывания.

Если оператор  $F(p) = P(p)/Q(p)$ , то модель с запаздывающей обратной связью можно задать операторным уравнением

$$Q(p)v(t) = P(p) \int_{\tau_0}^{\tau_a} h(\tau) N(v(t-\tau)) d\tau + P(p)x(t).$$

#### 4. Выводы

На практике оператор  $F(p)$  обычно считают либо рациональной функций со степенью знаменателя не более трех, либо функция-оператор  $Q(p)$  считается представляющей уравнение Ван дер Поля. Степень многочлена  $P(p)$  при этом обычно меньше степени  $Q(p)$ . Из приведенного уравнения видна очевидная аналогия метода его решения с методом решения уравнения Хатчинсона. Конечно, решение уравнения с запаздывающей обратной связью ставит в повестку задачу анализа его устойчивости – задачу, являющуюся темой отдельного исследования.

#### 5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РФФИ № 17-48-330726 p\_a.

#### 6. Литература

- [1] Абарбанель, Г.Д.И. Синхронизация в нейронных ансамблях / Г.Д.И. Абарбанель, М.И. Рабинович, А. Селверстон, М.В. Баженов, Р. Хуэрта, М.М. Сущик, Л.Л. Рубчинский // Успехи физических наук. – 1996. - Т. 166, № 4. – С. 363-390.
- [2] Rabinovich, M.I. Dynamical principles in neuroscience / M.I. Rabinovich, P. Varona, A.I. Selverston, H.D.I. Abarbanel // Reviews of Modern Physics. – 2006. – Vol. 78. – P. 1213-1265.
- [3] Мищенко, Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов – М.: Наука, 1975. – 248 с.
- [4] Мищенко, Е.Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.
- [5] Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин – М.: Наука, 1971. – 296 с.
- [6] Глызин, С.Д. Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Математические заметки. – 2013. – Т. 93, № 5. – С. 430-449.
- [7] Глызин, С.Д. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Успехи математических наук. – 2015. – Т. 3, № 423. – С. 3-76.
- [8] Глызин, С.Д. Релаксационные автоколебания в системе из двух синаптически связанных импульсных нейронов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Е.А. Марушкина // Моделирование и анализ информационных систем. – 2017. – Т. 24, №1. – С. 82-93.
- [9] Глызин, С.Д. Неупорядоченные колебания в нейросети из трех осцилляторов с запаздывающей вещательной связью / С.Д. Глызин, Е.А. Марушкина // Моделирование и анализ информационных систем. – 2018. – Т. 25, № 5. – С. 572-583.
- [10] Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений – М.: Мир, 1984. – 421 с.
- [11] Corduneanu, C. Functional differential equations. Advances and Applications / C. Corduneanu, Y. LI, M. Mahdavi – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2016. – 343 p.

- [12] Agarwal, R.P. Nonoscillation and Oscillation: Theory for functional differential equations / R.P. Agarwal, M. Bohner, W.-T. Li – New York: Marcel Dekker, 2004. – 371 p.
- [13] Балакин, М.И. Бифуркационный механизм формирования развитой мультистабильности в осцилляторе ван дер Поля с запаздывающей обратной связью / М.И. Балакин, Н.М. Рыскин // Нелинейная динамика. – 2017. – Т. 13, № 2. – С. 151-164.
- [14] Балакин, М.И. Мультистабильность и сложные колебательные режимы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки / М.И. Балакин, Н.М. Рыскин // Письма в журнал технической физики. – 2019. – Т. 45, № 6. – С. 33-35.
- [15] Кропотов, Ю.А. Методы проектирования телекоммуникационных информационно-управляющих систем аудиообмена в сложной помеховой обстановке / Ю.А. Кропотов, А.А. Белов, А.Ю. Проскуряков, А.А. Колпаков // Системы управления, связи и безопасности. – 2015. – № 2. – С. 165-183.
- [16] Кропотов, Ю.А. Методы проектирования алгоритмов обработки информации телекоммуникационных систем аудиообмена / Ю.А. Кропотов, А.А. Парамонов. – Москва, 2015. – 226 с.
- [17] Колпаков, А.А. Аспекты оценки увеличения производительности вычислений при распараллеливании процессоров вычислительных систем / А.А. Колпаков, Ю.А. Кропотов // Методы и устройства передачи и обработки информации. – 2011. – № 13. – С. 124-127.

## Modeling of neural systems and networks by functional differential equations

V.A. Ermolaev<sup>1</sup>, Y.A. Kropotov<sup>1</sup>, A.Y. Proskuryakov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Murom Institute (branch) «Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs», Orlovskaya street 23, Murom, Russia, 602264

**Abstract.** The article considers models of neural systems in the form of functional differential equations, models with distributed delay, obtained by generalizing their corresponding systems with discrete delay, described by differential-difference equations. It is shown that such a generalization allows, while preserving all the capabilities of models with discrete delay in terms of simulating self-oscillations characteristic of neural networks, to give the latter a more adequate character. This is confirmed by the results of modeling the Hutchinson system with distributed delay using Matlab tools, which showed the presence of a period and the nature of self-oscillations depending on the model parameters and, therefore, the feasibility of burst and single transmission of nerve impulses. The capabilities of systems with distributed delay in the feedback circuit due to the multiple propagation paths of disturbances both in the interneuron medium and in the network connections are shown. During the simulation, the distribution of delay approximated by a second-order polynomial in a system of independent exponential functions is considered.