

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ ГОРЕНИЯ ИЗОЛЯЦИИ\*

Ю.С. Ефимова<sup>1</sup>, Е.А. Щепакина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный университет,

<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва  
(национально исследовательский университет)

Данная работа посвящена исследованию динамической модели горения изоляции. Исследование проводится методами геометрической теории сингулярно возмущенных систем. Установлено, что в данной ситуации могут протекать как безопасные режимы выгорания изоляции, так и режим теплового взрыва в зависимости от соотношений параметров моделирующей системы. Получены критические условия безопасного протекания процесса.

Рассматривается математическая модель горения изоляции, которое может произойти из-за утечки горючей жидкости или газа из несущей трубы в инертную пористую среду. Затем жидкость пропитывается пористой поверхностью изоляционного материала, и происходит экзотермическая реакция окисления. Все это приводит к повышению температуры и, в конечном итоге, в определенных условиях горючая смесь самовоспламенится. Изолирующий материал можно представить как пучок параллельных «капилляров» одинакового диаметра. В этих «капиллярах» будем считать распределение горючего вещества равномерным. Предполагается, что одним из условий, в которых будет протекать реакция окисления, станет однородность химического процесса. Под однородностью понимается, то, что одни и те же происходящие в среде процессы имеют место во всех «капиллярах» одновременно. Предполагается, что реакция протекает в условиях адиабатического процесса. При сделанных предположениях математическая модель процесса описывается сингулярно возмущенной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида [1-3]:

$$\varepsilon \dot{\theta} = \mu x \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - (\theta - \theta_0) - vx \exp\left(\frac{b\theta}{1+\beta\theta}\right) \quad (1)$$

$$\dot{x} = -\alpha x \exp\left(\frac{b\theta}{1+\beta\theta}\right) - K_1 x \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) \quad (2)$$

где  $\varepsilon = \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right)$ ,  $\alpha = K_2 \exp\left(\frac{1-b}{\beta}\right)$ ,  $\mu = \frac{Q K_1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right)$ ,  $v = \frac{Q_c K_2}{\beta^2} \exp\left(-\frac{b}{\beta}\right)$ ,  $x$  – безразмерная концентрация горючей жидкости,  $\theta$  – безразмерная температура горючего,  $\theta_0$  – безразмерная температура окружающей среды,  $t$  – безразмерное время,  $Q$  – теплота экзотермической реакции окисления,  $Q_c$  – латентная теплота парообразования,  $\beta$  – нормирующий коэффициент,  $b$  – отношение коэффициента температуры парообразования к энергии активации реакции окисления,  $K_1$  и  $K_2$  – предэкспоненциальные множители.

Исследование модели (1), (2) и моделирование критических условий проводится с помощью геометрической теории сингулярных возмущений. Роль самих критических ситуаций важна при рассмотрении в сложных химических системах. Благодаря определению критических режимов станет понятно, когда и как будет протекать безопасный режим реакции, а когда произойдет переход к взрывному режиму. Для моделирования критических явлений в исследуемой модели, выясним, какие режимы реакции возможны в рассматриваемой химической системе. Для этого исследуем медленную кривую системы (1), (2), т. е. кривую, задаваемую вырожденным уравнением системы [3]:

$$F(x, \theta) = \mu x \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - (\theta - \theta_0) - vx \exp\left(\frac{b\theta}{1+\beta\theta}\right) = 0. \quad (3)$$

---

\* Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 13-01-97002-р и 14-01-97018\_р.

Напомним [3-5], что подмножество медленной кривой называется устойчивым (неустойчивым), если на нем выполняется условие  $\frac{\partial F}{\partial \theta} < 0 (> 0)$ . В  $\varepsilon$  – окрестности устойчивых и неустойчивых участков медленной поверхности лежат устойчивые (притягивающие) и неустойчивые (отталкивающие) медленные инвариантные многообразия. Так, на рисунках 1 – 4 участки  $S$  и  $D$  медленной кривой являются устойчивыми, а участки  $U$  и  $H$  – неустойчивыми.

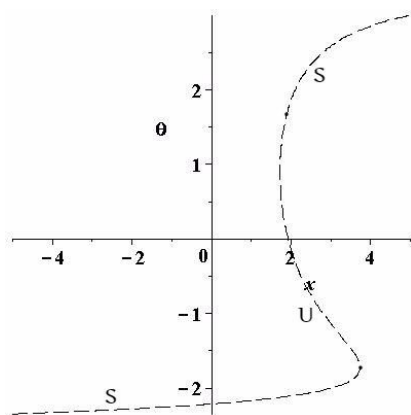


Рисунок 1. Медленная кривая системы (1), (2) при  $b < b^T < b_0$

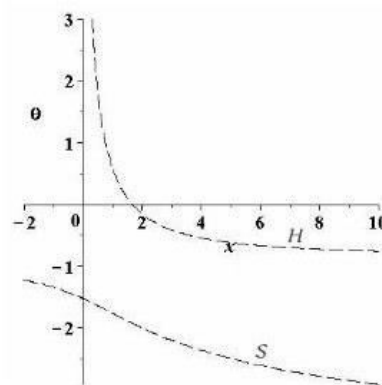


Рисунок 2. Медленная кривая системы (1), (2) при  $b = b^T$

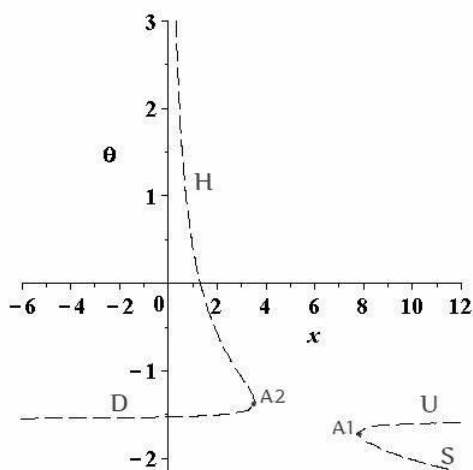


Рисунок 3. Медленная кривая системы (1), (2) при  $b > b_0$

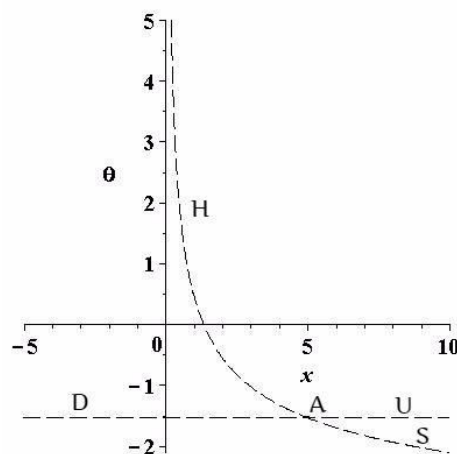


Рисунок 4. Медленная кривая системы (1), (2) при  $b = b_0$

Из (3) следует, что форма медленной кривой зависит от соотношений между параметрами системы. Рассмотрим случай  $v < a\mu$  (в случае  $v > a\mu$  результат будет аналогичным). Будет рассматривать параметр  $b$  как бифуркационный. Тогда вид медленной кривой зависит от того, будет ли параметр  $b$  меньше или больше некоторого значения  $b_0$  (см. рис. 1 – 4), где

$$b_0 = 1 + \frac{(1+\beta\theta_0)}{\theta_0} \ln\left(\frac{\mu}{v}\right),$$

при котором  $\theta_T = \theta_0$ , а значение  $\theta = \theta_T = \frac{1}{b-1-\beta \ln(\mu/v)} \ln\left(\frac{\mu}{v}\right)$  отвечает асимптоте медленной кривой.

Медленный режим реакции будет протекать, если, выходя из начальной точки, фазовые траектории будут проходить вдоль устойчивого участка медленной кривой, см.

рис. 5, 6. Нижняя ветвь медленной кривой может иметь две точки экстремума (рис. 1) или одну точку перегиба (рис. 2). Если точек экстремума две, то между ними будет находиться неустойчивый участок медленной кривой  $U$ . При  $b^T = b_0$  и  $\theta = \theta_T$  две точки экстремума совпадают и являются точкой перегиба с координатами  $(\theta_T, x(\theta_T))$ , см. рис. 2.

При  $b > b_0$  обе ветви медленной кривой состоят из неустойчивых и устойчивых участков которые разделены точками срыва, см. рис. 3. В  $\varepsilon$ - окрестности устойчивых ( $S, D$ ) и неустойчивых ( $U, H$ ) частей медленной кривой лежат устойчивые ( $S_\varepsilon, D_\varepsilon$ ) и неустойчивые ( $U_\varepsilon, H_\varepsilon$ ) медленные инвариантные многообразия. И если начальная точка не попадает в область притяжения медленного интегрального многообразия  $D_\varepsilon$ , то будет происходить тепловой взрыв или тепловой взрыв с запаздыванием [3-10], см. рис. 7.

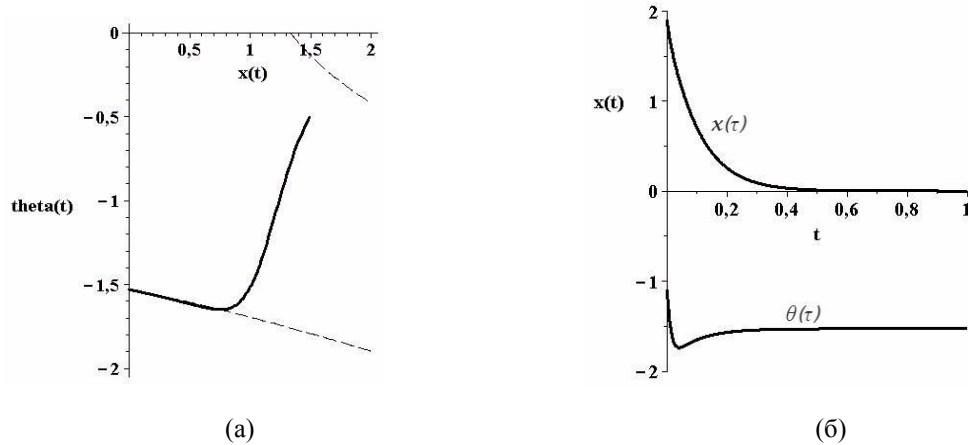


Рисунок 5. (а) Траектория (сплошная линия) и медленная кривая (пунктир) системы (1), (2) и (б) временные развертки  $\theta$  и  $x$  в случае режима медленного выгорания:  $b=0,3685$ . Здесь и на всех других рисунках значения остальных параметров:  $\mu=2.017, \nu=0.870, \varepsilon=0.01, \beta=0.14, K_1=1, \alpha=21.57269880, \theta_0=-1.530612245$

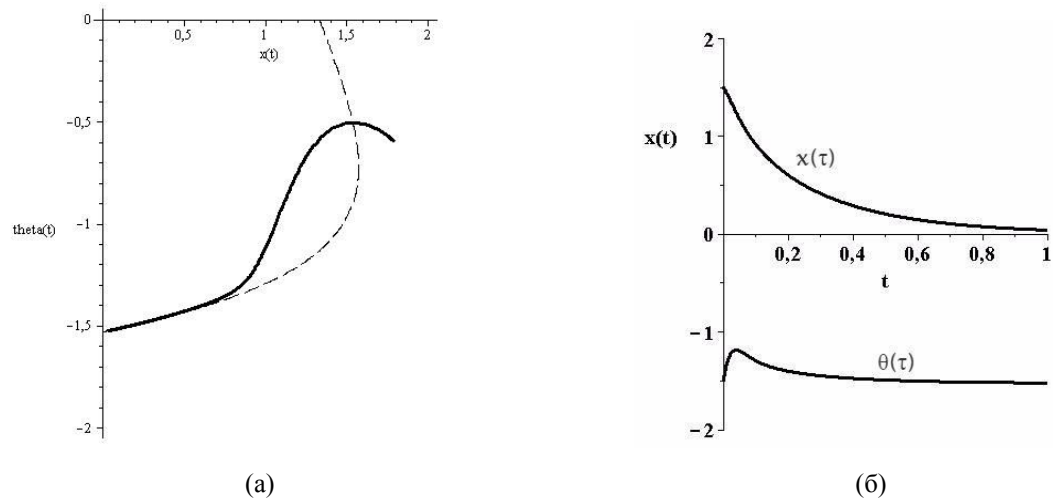


Рисунок 6. (а) Траектория (сплошная линия) и медленная кривая (пунктир) системы (1), (2), и (б) временные развертки  $\theta$  и  $x$  в случае режима медленного выгорания:  $b=1$ , начальная точка лежит в области влияния  $D_\varepsilon$

При  $b = b_0$  медленная кривая будет иметь точку самопересечения (рис. 4). Этот случай обеспечивает условия для того, чтобы  $S_\varepsilon$  и  $H_\varepsilon$  «склеить» в точке самопересечения медленной кривой. При  $b = b^* = b_0 + O(\varepsilon)$  произойдет «склейка» инвариантных многообразий. Таким образом, система (1), (2) будет иметь траекторию-утку, т. е. траекторию сингулярно возмущенной системы, проходящую сначала вдоль устойчивого

медленного инвариантного многообразия, а потом вдоль неустойчивого. В системе (1), (2) такая траектория будет разграничивать области безопасных и взрывных режимов, т. е. описывать критический режим. Этот режим не будет взрывным, так как температура будет расти относительно медленно и не будет медленным, в связи с тем, что в такой системе разогрев гораздо больше единицы, см. рис. 8.

Асимптотическое представление траектории-утки и параметра  $b$  можно найти в виде [3, 4]:

$$\theta = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + O(\varepsilon), \quad (4)$$

$$b = b^* = b_0 + \varepsilon b_1 + O(\varepsilon). \quad (5)$$

Точка самопересечения медленной кривой является точкой склейки интегральных многообразий и имеет координаты  $(x^*, y_0^*)$ , где

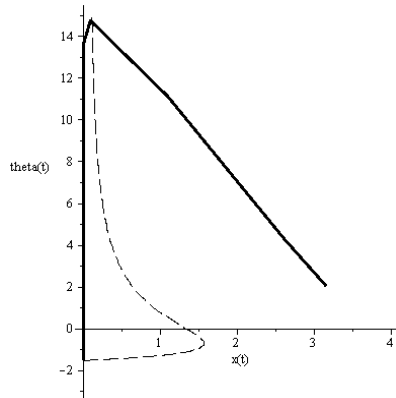
$$x^* = \frac{(1+\beta\theta_0)\theta_0}{\mu \exp(\theta_0/(1+\beta\theta_0)) \ln(v/\mu)}, y_0^* = y_0(x^*) = \theta_0. \quad (6)$$

Коэффициенты в разложении (4) находим методом, аналогичным методу малого параметра, подставляя разложения (4), (5) в систему (1), (2). При этом коэффициенты в разложении (5) находим из условия непрерывности функций  $y_0(x), y_1(x)$  и т. д. в точке срыва. Первое приближение критического значения параметра  $b$ , полученное таким образом, имеет вид

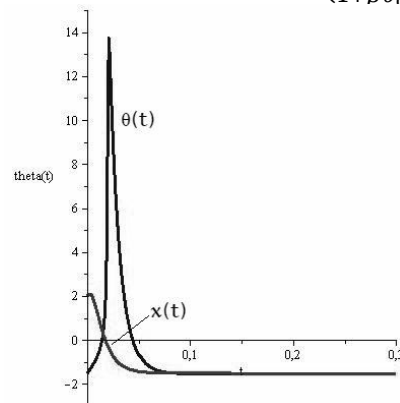
$$b_1 = \frac{y_0'(x^*)(1+\beta\theta_0)}{v\theta_0} \left[ K_1 \exp\left(\frac{(1-b_0)\theta_0}{(1+\beta\theta_0)}\right) \right] + \alpha,$$

где

$$y_0'(x^*) = \frac{2(1+\beta\theta_0)^2}{x^*} \left[ vb_0 \exp\left(\frac{b_0\theta_0}{1+\beta\theta_0}\right) - \mu \exp\left(\frac{\theta_0}{1+\beta\theta_0}\right) \right] \times \\ \times \left[ \mu(1-2\beta(1+\beta\theta_0)) \exp\left(\frac{\theta_0}{1+\beta\theta_0}\right) - vb_0(b_0-2\beta(1+\beta\theta_0)) \exp\left(\frac{b_0\theta_0}{1+\beta\theta_0}\right) \right].$$

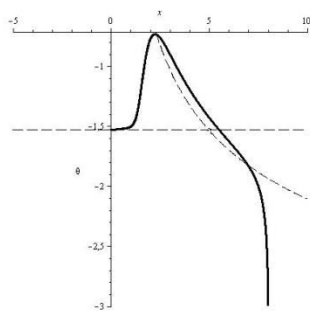


(a)

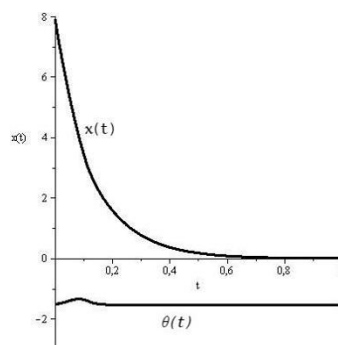


(б)

Рисунок 7. (а) Траектория (сплошная линия) и медленная кривая (пунктир) системы (1), (2) и (б) временные развертки  $\theta$  и  $x$  в случае режима теплового взрыва:  $b = 1$ . Начальная точка лежит в области влияния  $H_\varepsilon$



(a)



(б)

Рисунок 8. (а) Траектория-утка (сплошная линия) и медленная кривая (пунктир) системы (1), (2) и (б) временные развертки  $\theta$  и  $x$  в случае критического режима:  $b = 0,56827$

Таким образом, на основе качественного анализа модели установлено, что в рассматриваемой химической системе в зависимости от соотношений между параметрами  $b$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  может протекать либо медленный режим горения, либо режим теплового взрыва. Взрыв произойдет в том случае, если температура горючей жидкости растет очень быстро, а концентрация горючего практически не изменяется.

При медленном режиме траектория системы будет проходить вдоль устойчивого инвариантного многообразия медленного движения. В случае теплового взрыва траектория будет срываться с медленного инвариантного многообразия.

В силу непрерывной зависимости правых частей системы (1), (2) от параметров между взрывными и медленным режимами будет располагаться область переходных режимов, которые являются критическими, так как они определяют границу безопасного протекания процесса горения изоляции. Соответствующая траектория вначале движется вдоль устойчивого инвариантного многообразия, а потом вдоль неустойчивого инвариантного многообразия системы, т. е. является траекторией-уткой.

Найденные условия протекания критического режима в виде асимптотических разложений по малому параметру сингулярно возмущенной системы. Подобные задачи определения критических условий безопасных процессов рассматривались в работах [3-7].

#### Литература

1. McIntosh A.C., Bains M., Crocombe W., Griffiths J.F. Autoignition of combustible fluids in porous insulation materials // *Combust. Flame.*—1994.—Vol. 99. P. 541-550.
2. McIntosh A.C., Griffiths J.F. On the thermal runaway of combustible fluids in lagging material // *J. of Applied Math.*—1995.—Vol. 54. P. 83–96.
3. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.—320 с.
4. Щепакина Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий // *Дифференциальные уравнения.*—2004.—№5. С. 713-716.
5. Щепакина Е.А. Условия безопасности воспламенения горючей жидкости в пористом изоляционном материале // *Сибирский журнал индустриальной математики.*—2002.—№3(11). С. 162–169.
6. Щепакина Е.А. Критические условия самовоспламенения в пористой среде // *Химическая физика.*—2001.—№7. С.3-9.
7. Щепакина Е.А. Притягивающе-отталкивающие интегральные поверхности в задачах горения // *Матем. моделирование.*—2002.—№3. С.30–42.