

# Моделирование датчика волновых aberrаций, согласованного с функциями Цернике

М.И. Помещиков

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева

Самара, Россия

m.pomeshchikov@mail.ru

**Аннотация**—В данной работе рассмотрено определение aberrаций волнового фронта с помощью его разложения по функциям Цернике. Смоделирован оптический фильтр, согласованный с функциями Цернике. Было проведено сравнение трех подходов к разложению волнового фронта.

**Ключевые слова**— aberrации, волновой фронт, полиномы Цернике.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения отклонений волнового фронта от начальной формы является одной из самых важных в оптике. Эта задача актуальна в таких областях, как астрономия [1] и медицина [2]. На данный момент существует множество методов для решения этой проблемы, например, датчик Шака-Гартмана [3], и постоянно появляются новые. Однако, существующие методы не лишены недостатков, в частности, высокая вычислительная сложность и чувствительность сенсоров к вибрациям.

Одним из видов сенсоров для определения aberrаций, являются сенсоры, использующие разложение в ряд полиномов Цернике. Этот вид сенсоров более устойчив к вибрациям. Хотя он обладает несколько меньшей точностью, ее все равно хватает для решения большинства задач. В связи с этим, в последнее время активно ведутся исследования в данном направлении [4, 5], в том числе, с использованием нейронных сетей [6].

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ

В работе рассматривается разложение волнового фронта по функциям Цернике вида:

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^m(\rho) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $R_n^m(\rho)$  – радиальный многочлен Цернике, определяемый как

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2}-k\right)! \left(\frac{n-m}{2}-k\right)!} \rho^{n-2k}. \quad (2)$$

Так как функции Цернике являются ортогональными на единичном круге, любая фазовая aberrация может быть записана как их линейная комбинация:  $\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n,m} a_n^m Z_n^m(\rho, \theta)$ . Используя представление aberrаций с помощью функций Цернике можно получить следующее выражение:

$$e^{i\Phi(\rho, \theta)} = 1 + i \sum_j a_j Z_j(\rho, \theta) - \frac{1}{2} \left[ \sum_j a_j Z_j(\rho, \theta) \right]^2 + \dots \quad (3)$$

Для малых aberrаций ( $a_j \ll 1$ ) в ряде (3) может быть оставлено только слагаемое первого порядка. Однако, это допущение подходит не для всех практических случаев. В то же время, из-за сложности полученного ряда, данный подход долгое время не находил применения для порядков больше второго. Сложность заключается в том, что ряд (3) генерирует произведения  $Z_j Z_k$  во втором

порядке разложения, и произведения более высоких порядков в последующих.

В 2009 году в работе [7] было показано, что любое произведение двух функций Цернике может быть представлено как линейная комбинация других функций Цернике. В данной работе проведено исследование трех способов получения разложения (3). Первый, аналитический, с использованием результатов работы [7] и два с использованием математического моделирования. Были изучены особенности их использования и границы применимости.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для моделирования 25-канального оптического фильтра, согласованного с функциями Цернике была написана программа на языке Matlab. Моделирование фильтра описывается следующей формулой:

$$c_p = F[f(x, y)\tau(x, y)], \quad (4)$$

где  $F$  – преобразование Фурье,  $f(x, y)$  – функция, описывающая волновой фронт,  $\tau(x, y) = \sum_p Z_p(x, y) \exp(i\alpha_p x + i\beta_p y)$ ,  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  – действительные числа, соответствующие пространственным частотам  $p$ -го дифракционного порядка.

На рис. 1 приведены коэффициенты разложения исследуемого волнового фронта  $e^{i2\pi\alpha Z(3,3)}$ , полученные при различных  $\alpha$  с помощью смоделированного оптического фильтра. Видно, что фильтр хорошо работает для aberrаций с уровнем  $\alpha < 0,5$ .

На рис. 2 представлены коэффициенты разложения, полученные аналитическим методом для  $\alpha = 0,2$ .

На рис. 3 представлены коэффициенты, полученные прямым численным интегрированием для  $\alpha = 0,2$ .

Видно, что все три варианта расчета, в принципе, хорошо согласуются между собой. Нулевой порядок при моделировании фильтра и численном интегрировании можно не учитывать. Самым точным методом является прямое численное интегрирование. Многоканальный фильтр является близким по точности к первому методу, является его оптической реализацией. Также, при моделировании оптического фильтра появляется много побочных порядков, что можно объяснить погрешностью дискретизации и интерференцией порядков друг с другом. Результаты, полученные аналитическим методом, сильнее отличаются от результатов, полученных первыми двумя способами, т.к. в нем используется аппроксимация и разложение только до 3-го порядка. Поэтому аналитический метод можно использовать с осторожностью.

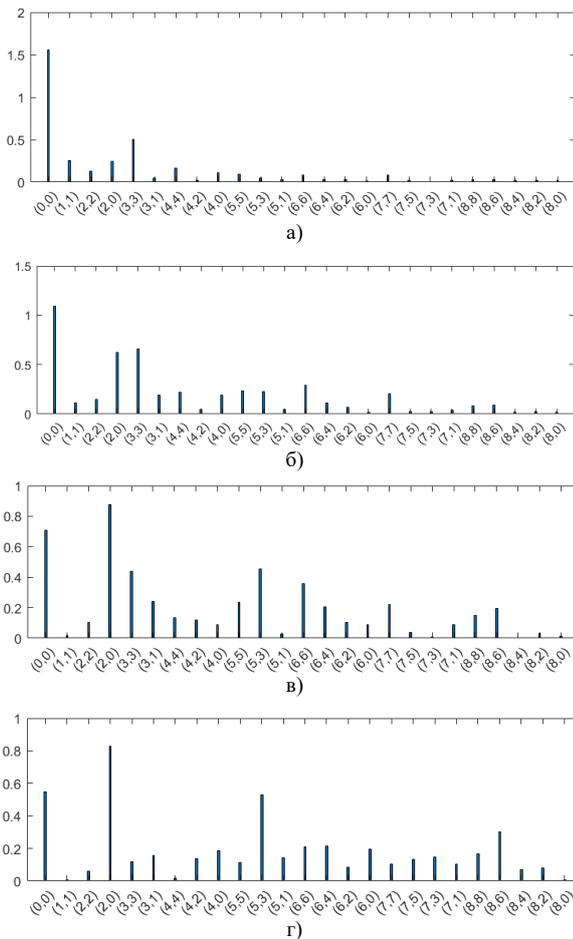


Рис. 1. Яркость в центрах порядков разложения при различных  $\alpha$ : а)  $\alpha = 0,2$ ; б)  $\alpha = 0,4$ ; в)  $\alpha = 0,6$ ; г)  $\alpha = 0,8$

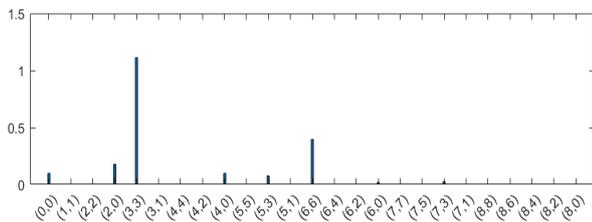


Рис. 2. Коэффициенты разложения, полученные аналитическим методом для  $\alpha = 0,2$

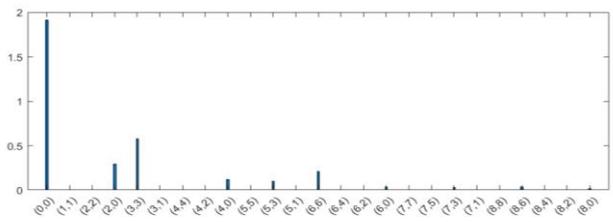


Рис. 3. Коэффициенты разложения, полученные прямым численным интегрированием для  $\alpha = 0,2$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено сравнение прямого разложения комплексной функции волнового фронта по базису полиномов Цернике и представления в виде ограниченного ряда. Показана хорошая применимость оптического фильтра, согласованного с функциями Цернике для аббераций с уровнем  $\alpha < 0,5$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Клебанов, Я.М. Компенсация аббераций волнового фронта в телескопах космических аппаратов с регулировкой температурного поля телескопа / Я.М. Клебанов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина, А.Н. Давыдов, К.А. Поляков // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 30-36. DOI: 10.18287/0134-2452-2017-41-1-30-36.
- [2] Хорин, П.А. Анализ аббераций роговицы человеческого глаза / П.А. Хорин, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков, С.Л. Бранчевский // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 810-817. DOI: 10.18287/0134-2452-2016-40-6-810-817.
- [3] Hongbin, Y. Tunable Shack-Hartmann wavefront sensor based on a liquid-filled microlens array / Y. Hongbin, Z. Guangya, C.F. Ciong, L. Feiwen, W.A. Shouhua // J. Micromech. Microeng. – 2008. – Vol.18(10) – P. 1-8.
- [4] Ramos, A. Asensio Image reconstruction with analytical point spread functions / A. Asensio Ramos, A. López Ariste // Astronomy & Astrophysics. – 2010. – Vol. 518. – P. A6.
- [5] Khonina, S.N. Wavefront Aberration Sensor Based on a Multichannel Diffractive Optical Element / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, A. P. Porfirev // Sensors. – 2020. – Vol. 20(14). – P. 3850.
- [6] Nishizaki, Y. Deep learning wavefront sensing / Y. Nishizaki, M. Valdivia, R. Horisaki, K. Kitaguchi, M. Saito, J. Tanida, E. Vera // Opt. Express. – 2019. – Vol. 27. – P. 240-251.
- [7] Mathar, R.J. Zernike basis to cartesian transformations / R.J. Mathar // Serbian Astronomical Journal. – 2009. – Vol. 179. – P. 107-120.