Модель ядра интегрального уравнения Линдли на основе селектирующих функций

И.В. Карташевский[1]

[1]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010

Аннотация. В статье рассматривается модель ядра интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания вида G/G/1. Поскольку строгое решение уравнения в аналитическом виде Линдли весьма сложно, можно прибегнуть к нахождению приближенных решений, основанных на процедуре «вырождения» ядра, при которой ядро факторизуется по своим переменным. Рассматривается один из таких методов, основанный на использовании селектирующих функций. В качестве примера рассматривается частный случай, когда интервалы времени прибытия имеют гамма-распределение, а время обслуживания постоянное.

1. Введение

Известно, что мультимедийный трафик на входе телекоммуникационных устройств имеет непуассоновское распределение [1], в связи с чем расчет параметров узлов телекоммуникационной сети возможен при выборе системы массового обслуживания G/G/1 в качестве их математической модели [2,3], для которой в настоящее время не существует простых методов расчета характеристик.

Известно [4], что исследование одноканального устройства массового обслуживания общего вида G/G/1 связано с решением интегрального уравнения Линдли, которое можно записать в виде

$$F(y)=\int_{0_-}^{\infty}K(y-x)\mathrm{d}F(x),\quad y>0\,. \tag{1}$$

В выражении (1) $F(y)$ - интегральная функция распределения времени ожидания заявки на обслуживание в очереди, $K(y)$ - ядро интегрального уравнения, записываемое как

$$K(u)=\int_{0}^{\infty}B(u+t)\mathrm{d}A(t)\,, \tag{2}$$

где $B(t)$ - интегральная функция распределения времени обслуживания, $A(t)$ - интегральная функция распределения интервалов времени между поступлениями заявок.

Уравнение (1) принадлежит к типу уравнений Винера Хопфа, решение которых в общем случае получить достаточно сложно [5], поэтому преобразуем его, приводя к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого продифференцируем (1) по переменной y

$$\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}K(y)}{\mathrm{d}y}F(0)+\int_{0_-}^{\infty}K'(y-x)\,f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

и далее с учетом $\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = f(y)$, разделив обе части уравнения (3) на $F(0)$ - вероятность того, что система обслуживания пуста, получим

$$\phi(y) = K'(y) + \int_{0_-}^{\infty} K'(y-x)\phi(x)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

где $\frac{f(y)}{F(0)} = \phi(y)$. Вероятность $F(0)$ для однолинейной системы определяется через загрузку системы в виде [4]: $F(0) = 1-\rho$, где ρ - коэффициент загрузки, $\rho < 1$.

При этом

$$K'(u) = \int_{0}^{\infty} b(u+t)a(t)\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

В выражениях (3)-(5) $f(y)$, $b(t)$ и $a(t)$ - соответствующие плотности вероятностей.

2. Определение ядра для системы Г/D/1

Для конкретизации метода решения уравнения (4) рассмотрим в качестве системы G/G/1 систему Г/D/1, где символ Г означает гамма-распределение, а D – постоянную длительность обслуживания заявки, которую обозначим как t_0. Тогда $b(t) = \delta(t - t_0)$.Плотность гамма-распределения имеет вид $a(t) = t^{k-1}\exp(-\frac{t}{\theta})\left(\theta^k \Gamma(k)\right)^{-1}, \quad t \geq 0$.

Для определенности выберем $\theta = 2,\ k = 0{,}5$ (при $k = 0{,}5$ гамма-распределение обладает «тяжелым» хвостом). Тогда $a(t) = \exp(-\frac{t}{2})\left(2\pi t\right)^{-1/2}, \quad t \geq 0$.

При выбранных $b(t)$ и $a(t)$

$$K'(u) = \left(2\pi\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{t_0 - u}{2}\right)\left(t_0 - u\right)^{-1/2}. \tag{6}$$

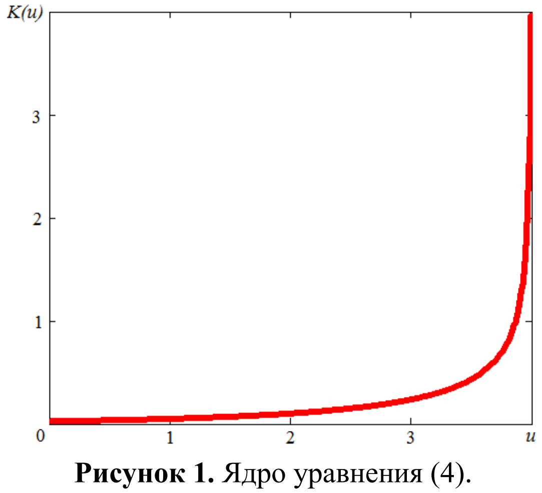

Рисунок 1. Ядро уравнения (4).

Вид ядра (6) при значении $t_0 = 4$ представлен на рисунке 1.

Точное решение уравнения (4), которое принадлежит классу уравнений свертки, можно получить, как показано в [6], с использованием преобразования Фурье при аналитическом продолжении на полуплоскость комплексной функции, исходно заданной на действительной оси. Однако, получить такое решение достаточно сложно, поэтому прибегают к нахождению приближенных решений [7], основанных на процедуре «вырождения» ядра, при которой ядро факторизуется по своим переменным. Один из таких методов основан на использовании селектирующих функций [8].

В силу того, что функция $\phi(y)$ представляет собой плотность вероятностей случайных интервалов времени, суть которых - время ожидания заявки в очереди, искать решение уравнения (4) следует для значений $y \geq 0$ при выполнении условия $x \geq y$. С другой стороны, из выражения (6) и рис.1 следует, что, ядро существует и при отрицательных значениях аргумента. Так, например, при $u = -4$ значение ядра составляет очень маленькую величину, равную 0,0026. Для сохранения почти всех значений ядра, определяющих вид искомой плотности вероятностей $\phi(y)$, сдвинем вправо ядро по оси абсцисс на величину t_0, а интегрирование в уравнении (4) проведем на интервале $[0,\ 2t_0]$, т.е. на интервале, на котором ядро представлено с допустимой для наших целей погрешностью.

3. Аппроксимация ядра селектирующими функциями

Теперь уравнение (4) можно переписать в виде

$$\phi(y) = K'(y) + \int_0^{2t_0} K'(y-x)\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Представить ядро на интервале $[0,\ 2t_0]$ в вырожденном виде с помощью селектирующих функций можно следующим образом [8].

Обозначим $K'(x,t) = k(x,t)$. Тогда

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \left[g_i(x)t + h_i(x)\right] \mathrm{si}(t, t_i, t_{i+1}), \tag{8}$$

где селектирующая функция $\mathrm{si}(t, t_i, t_{i+1})$ определяется следующим образом

$$\mathrm{si}(t, t_i, t_{i+1}) = \begin{cases} 0, & t < t_i, \\ 1, & t_i < t < t_{i+1} \\ 0, & t > t_{i+1} \end{cases}. \tag{9}$$

Значения (9) в точках t_i и t_{i+1} записываются как

$$\mathrm{si}(t_i, t_i, t_{i+1}) = \mathrm{si}(t_{i+1}, t_i, t_{i+1}) = 0{,}5(\lim_{x \to x_i - 0} \mathrm{si} + \lim_{x \to x_i + 0} \mathrm{si}) = 0{,}5(\lim_{x \to x_{i+1} - 0} \mathrm{si} + \lim_{x \to x_{i+1} + 0} \mathrm{si}) = 0{,}5\,. \tag{10}$$

Подставляя (8) в (7) можно получить

$$\phi(y) = K'(y) + \sum_{i=1}^{n} \left[g_i(x)\beta_i + h_i(x)\nu_i\right], \tag{11}$$

где

$$\beta_i = \int_0^{2t_0} t\phi(t)\mathrm{si}(t, t_i, t_{i+1})\mathrm{d}t\,,\ \nu_i = \int_0^{2t_0} \phi(t)\mathrm{si}(t, t_i, t_{i+1})\mathrm{d}t\,. \tag{12}$$

Далее, согласно [8], если обе части уравнения (11) умножить сначала на $t \cdot \mathrm{si}(t, t_j, t_{j+1})$ и проинтегрировать на интервале $[0,\, 2t_0]$, затем умножить на $\mathrm{si}(t, t_j, t_{j+1})$ и вновь проинтегрировать, то можно получить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \beta_j - \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\beta_i c_{ji} + \nu_i d_{ji}\right) = k_{1j} \\ \nu_j - \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\beta_i z_{ji} + \nu_i r_{ji}\right) = k_{2j} \end{cases}, \tag{13}$$

где $c_{ji} = \int_0^{2t_0} t \cdot g_i(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$, $d_{ji} = \int_0^{2t_0} t \cdot h_i(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$, $z_{ji} = \int_0^{2t_0} g_i(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$,

$r_{ji} = \int_0^{2t_0} h_i(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$, $k_{1j} = \int_0^{2t_0} t \cdot k(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$, $k_{2j} = \int_0^{2t_0} k(t)\mathrm{si}(t,t_j,t_{j+1})\mathrm{d}t$.

После того, как из решения системы линейных алгебраических уравнений будут найдены значения β_j и ν_j, уравнение (10) дает решение исходной задачи.

4. Пример

Проиллюстрируем процедуру получения «вырожденного» ядра согласно выражениям (7) и (8) на примере использования ядра вида (6). Развернутая запись выражения (8) с учетом сдвига ядра на t_0 для случая $n = 2$ при этом будет иметь вид

$$\sqrt{2\pi}^{-1} \exp\left(-\frac{2t_0 - x + t}{2}\right)(t_0 - x + t)^{-1/2} = [g_1(x)t + h_1(x)]\mathrm{si}(t,t_1,t_2) + [g_2(x)t + h_2(x)]\mathrm{si}(t,t_2,t_3). \quad (14)$$

Ориентируясь на «сдвинутый» вид ядра для значения $t_0 = 4$ выберем моменты времени для $\mathrm{si}(t,t_1,t_2)$ в виде $t_1 = 0$ и $t_2 = t_0$. Теперь из первого слагаемого в правой части (14) с учетом определения и свойств функции $\mathrm{si}(t,t_1,t_2)$ при $t_1 = 0$ сразу получаем

$$h_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2t_0 - x}{2}\right)(2t_0 - x)^{-1/2}.$$

Из условия $t_2 = t_0$ следует

$$\left[g_1(x)\cdot t_0 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2t_0 - x}{2}\right)(2t_0 - x)^{-1/2}\right]\frac{1}{2} = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{3t_0 - x}{2}\right)(3t_0 - x)^{-1/2},$$

что даёт

$$g_1(x) = \frac{2}{t_0}\cdot(2\pi)^{-1/2}\left[\exp\left(-\frac{3t_0 - x}{2}\right)(3t_0 - x)^{-1/2} - \exp\left(-\frac{2t_0 - x}{2}\right)(2t_0 - x)^{-1/2}\right].$$

Для второго слагаемого в правой части (14) с учетом того, что $t_2 = t_0$ и $t_3 = 2t_0$, можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} [g_2(x)t_0 + h_2(x)]\mathrm{si}(t_0, t_0, 2t_0) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{3t_0 - x}{2}\right)(3t_0 - x)^{-1/2} \\ [g_2(x)2t_0 + h_2(x)]\mathrm{si}(2t_0, t_0, 2t_0) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{4t_0 - x}{4}\right)(4t_0 - x)^{-1/2} \end{cases},$$

решая которую, можно получить функции $g_2(x)$ и $h_2(x)$.

Следует обратить внимание на особенность вычислений интегралов, определяющих коэффициенты уравнений (13). Рассмотрим, для примера, коэффициент c_{11}

$$c_{11} = \int_0^{2t_0} tg_1(t)\mathrm{si}(t,t_1,t_2)\mathrm{d}t.$$

С учетом свойств функции $\mathrm{si}(t,t_1,t_2)$ рассматриваемый интеграл может быть представлен в виде

$$c_{11} = \int_0^{2t_0} t\cdot g_1(t)\mathrm{si}(t,t_1,t_2)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(0 - t_1)\int_0^{t_1} t\cdot g_1(t)\mathrm{d}t + \mathrm{sgn}(2t_0 - t_1)\int_{t_1}^{2t_0} t\cdot g_1(t)dt\right.$$

$$\left. - \mathrm{sgn}(0 - t_2)\int_0^{t_2} t\cdot g_1(t)dt - \mathrm{sgn}(2t_0 - t_2)\int_{t_2}^{2t_0} t\cdot g_1(t)\mathrm{d}t\right., \quad (15)$$

где введена другая селектирующая функция [8], задаваемая как

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases} \qquad (16)$$

Анализ выражения для c_{11} с учетом свойств функции $\operatorname{sgn}(x)$ показывает, что значение c_{11} может быть вычислено в виде $c_{11}=\int\limits_0^{t_0} t\cdot g_1(t)\mathrm{d}t$.

Аналогичные рассуждения с использованием выражений (15) и (16) могут быть проведены применительно к вычислению и других коэффициентов.

Для получения численных значений интегралов, определяющих коэффициенты системы уравнений (13) используются табличные интегралы [9]:

$$\int\limits_\lambda^\mu x^{-1/2}\exp(-x)\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\left[\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)\right]$$

$$\int\limits_\lambda^\mu \sqrt{x}\exp(-x)\mathrm{d}x=\left[\sqrt{\lambda}\exp(-\lambda)-\sqrt{\mu}\exp(-\mu)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[\Phi(\mu)-\Phi(\lambda)\right],$$

где: $\Phi(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t.$

5. Заключение

Численное решение системы (13) позволяет для выбранного $t_0=4$ из уравнения (11) получить выражение для функции $\phi(x)$

$$\phi(x)=-4{,}255\exp\left(-\frac{12-x}{2}\right)(12-x)^{-1/2}+5{,}324\exp\left(-\frac{16-x}{2}\right)(16-x)^{-1/2}+0{,}42\exp\left(-\frac{8-x}{8}\right)(8-x)^{-1/2}. \qquad (17)$$

Проверка, реализуемая подстановкой (17) в уравнение (4) и численным решением последнего, подтвердила справедливость полученного результата. График функции $\phi(x)$ представлен на рисунке 2.

Как следует из уравнения (4) функцию плотности вероятностей времени ожидания заявки в очереди для рассматриваемой системы следует определять (при известном коэффициенте загрузки системы ρ) *в* виде

$$f(x)=(1-\rho)\phi(x).$$

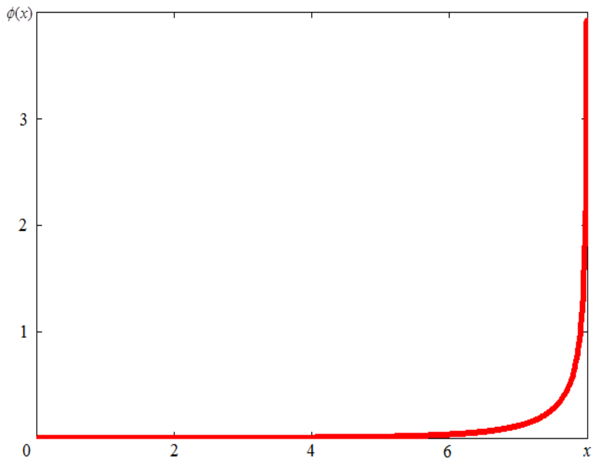

Рисунок 2. График функции $\phi(x)$.

6. Литература

[1] V. Paxson, and S. Floyd, "Wide-area traffic: the failure of Poisson modeling," IEEE/ACM Trans. Networking, vol.3, pp. 226-244, 1995.

[2] Boxma, O. & Cohen, J. “Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions” Queueing Systems (1999) 33: 177. doi:10.1023/A:1019124112386

[3] Thi My Chinh Chu, Hoc Phan and Hans-Jürgen Zepernick “Delay analysis for cognitive ad hoc networks using multi-channel medium access control” IET Communications (Volume: 8, Issue: 7, May 6 2014) pp. 1083 – 1093

[4] Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Пер. с англ. под ред. В.И. Неймана-М.: Машиностроение, 1979. - 432с.

[5] Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. / П.П. Забрейко. - М.: Наука, 1968. - 448с.

[6] Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. - М.: Наука, 1978. - 296с.

[7] Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов -М.: ГИФМЛ, 1962. - 708с.

[8] Мищенко В.А. Метод селектирующих функций в нелинейных задачах контроля и управления / В.А. Мищенко -М.: Сов. Радио, 1973. - 184с.

[9] Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик - М.: Наука, 1971. - 1108с.

The model of the kernel of the Lindley integral equation based on selective functions

I.V. Kartashevskiy[1]

[1]Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Lva Tolstogo street 23, Samara, Russia, 443010

Abstract. Here considered a model of the kernel of the Lindley integral equation for a queuing system G/G/1. An exact solution of Lindley equation can be obtained using the Fourier transform under analytic continuation to the half-plane of the complex function originally defined on the real axis. However, it is quite difficult to obtain such solution, therefore, one resorts to finding approximate solutions based on the procedure of "degeneration" of the kernel when the kernel is factorized according to its variables. The method based on the use of selective functions is used. As an example, a special case is considered when the arrival time intervals have a gamma distribution, and the service time is constant.

Keywords: Lindley integral equation, selective functions, queuing system.