Многостадийный псевдо-спектральный метод решения ОДУ (первого и второго порядка)

К.П. Ловецкий
Российский университет дружбы народов
Москва, Россия
lovetskiy-kp@rudn.ru

Л.А. Севастьянов
Российский университет дружбы народов
Москва, Россия
Объединенный институт ядерных исследований
Дубна, Россия
sevastianov-la@rudn.ru

Д.С. Кулябов
Российский университет дружбы народов
Москва, Россия
Объединенный институт ядерных исследований
Дубна, Россия
kulyabov-ds@rudn.ru

***Аннотация*—Реализован новый подход к численному решению ОДУ, заключающийся в переходе к многостадийной реализации алгоритма. Вместо слияния всех известных условий – дифференциальных (само уравнение) и начальных (или граничных) - в одну систему приближенных линейных алгебраических уравнений предлагается перейти к решению задачи в несколько этапов. Вначале выделяются спектральные коэффициенты, определяющие «общее» решение исходной задачи. Затем учет начальных/граничных условий позволяет выделить «частное» искомое решение.**

Ключевые слова— спектральный метод, коллокация, задача Коши, уравнение Пуассона.

1. Введение

В задачах оптики и высокочастотной электродинамики нередко приходится вычислять интегралы от быстро осциллирующих функций [1-3]. Разработанный Левиным [4] для этих целей метод эффективно сводит задачу интегрирования к задаче поиска медленно осциллирующего решения обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}+k(x)y=f(x)$ по методу коллокаций. Решение данной задачи, основанное на использовании разложения приближения по полиномам Чебышева [2], является предметом исследования настоящей работы.

Спектральные методы [5] основаны на поиске решения дифференциальных уравнений в виде разложения в ряд по известным базисным гладким функциям. Чаще всего они используют специальные ортогональные полиномы (такие как полиномы Чебышева и Лежандра) в качестве базисных функций для дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных.

Методы псевдо-спектральной коллокации удачно используют матрицы дифференцирования [6] для вычисления производных в точках коллокации, обеспечивая значительное ускорение метода, повышение точности при меньшем количестве точек сетки [7].

Метод коллокации [8-10] для ОДУ формулируется в физическом пространстве. В этом случае чебышевские матрицы дифференцирования вырождены, обладают различающимися на порядки собственными значениями, что обуславливает невозможность построения устойчивого численного алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Подход к решению ОДУ, основанный на переходе к его поиску в спектральном пространстве, приводит к решению достаточно простых СЛАУ. Для повышения надежности и устойчивости алгоритмов активно учитываются дискретная ортогональность и трехчленные рекуррентные соотношения, связывающие полиномы Чебышева.

2. Основная часть

В качестве примера предлагаемого подхода рассмотрим метод решения простейшей задачи Коши

$$y'(x)=f(x),\ y(x_0)=y_0,\ x\in[-1,1]. \qquad (1)$$

Задача естественным образом распадается на две подзадачи:

- полиномиальную интерполяцию производной (вычисление коэффициентов разложения производной по базисным функциям) и
- вычисление коэффициентов искомой функции по граничному (краевому или иному) условию и коэффициентам разложения производной.

Спектральный метод решения задачи заключается в представлении интерполирующей функции в виде ряда

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x)\,, x\in[-1,1], \qquad (2)$$

по базису из полиномов Чебышева первого рода $\{T_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, заданному в гильбертовом пространстве функций на отрезке [-1,1]. В этом случае выражение для производной имеет вид

$$p'(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k T_k'(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x). \qquad (3)$$

Используя трехчленные рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют чебышевские полиномы и их производные [8] и приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах в (3), приходим к следующей зависимости [7] коэффициентов c_k от b_k:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{1/2}{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Вычисление коэффициентов $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ сводится к умножению трехдиагональной матрицы на вектор, что можно реализовать по следующей схеме

$$\begin{cases} c_1 = b_0 - b_2/2, & k = 1 \\ c_k = (b_{k-1} - b_{k+1})/2k, & k > 1, k < n-1 \\ c_k = b_{k-1}/2k, & k = n-1, n \end{cases} \quad (5)$$

Перейдем к вычислению коэффициентов разложения $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ функции $f(x)$ по полиномам Чебышева I-го рода [7] на интервале [-1,1]

$$\sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x) = f(x).$$

Метод коллокации [9, 10] заключается в подборе таких коэффициентов $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ разложения полинома $p'(x)$, что выполняются равенства при искомых коэффициентах $b_k, k = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x_j) = f(x_j), j = 0, \dots, n, \quad (6)$$

в точках коллокации $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Коэффициенты $b_k, k = 0, \dots, n$ должны быть решением СЛАУ (6). Или в матричной форме:

$$\boldsymbol{Tb} = \boldsymbol{f}. \quad (7)$$

Устойчивость алгоритма достигается за счет использования свойства дискретной ортогональности чебышевской матрицы $\boldsymbol{T}$. Выбор сетки Гаусса-Лобатто позволяет при делении на $\sqrt{2}$ первого и последнего уравнений (6) получить эквивалентную систему $\tilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{f}}$. Умножение ее слева на $\tilde{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}$ дает систему с диагональной матрицей

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \dots \\ \tilde{f}_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\tilde{\boldsymbol{f}} = \left(f_0/\sqrt{2}, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n/\sqrt{2}\right)^T$.

Коэффициенты разложения функции $f(x)$ легко выписываются в явном виде

$$b_0 = \tilde{f}_0/n, b_1 = 2\tilde{f}_1/n, b_2 = 2\tilde{f}_2/n, \dots, b_n = \tilde{f}_n/n. \quad (9)$$

Формулы (9) однозначно определяют последние n коэффициентов разложения искомой функции $p(x)$. Для определения еще одного коэффициента – c_0 – необходимо дополнительное условие. Рассматриваемый метод позволяет решать как задачи Коши с начальными условиями, так и задачи с граничными условиями общего вида [2, 11]

В задаче Коши с начальным условием

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(-1) = y_0 \quad (10)$$

c_0 вычисляется по формуле

$$c_0 = y_0 - \sum_{k=1}^{n} c_k (-1)^k. \quad (11)$$

Если же дополнительное условие задано в произвольной точке интервала интегрирования $y_b = y(x_b), x_b \in [-1,1]$, c_0 определяется по формуле

$$c_0 = y_b - \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x_b). \quad (12)$$

На правом конце интервала интегрирования полиномы Чебышева любого порядка принимают значение, равное 1 и

$$c_0 = y_r - \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x_r) = y_r - \sum_{k=1}^{n} c_k. \quad (13)$$

3. Заключение

Обычно методы аппроксимации решения [5, 6, 8-10], сводятся к системам уравнений, которые включают в себя сразу и условия, задающие поведение производных решения, и начальные/граничные условия,.

В отличие от предшествующих работ (в рамках метода коллокаций) задача разбивается на подзадачи. Вначале выделяется множество решений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Учет начальных/граничных условий осуществляется на втором этапе и сводится к решению линейного уравнения с одним неизвестным коэффициентом (ОДУ I-го порядка) или двумя при решении ОДУ II-го порядка (задачи Пуассона). Тем самым решение сложной СЛАУ заменяется двумя или тремя простыми алгебраическими вычислениями.

Литература

[1] Deaño, A. Computing Highly Oscillatory Integrals / A. Deaño, D. Huybrechs, A. Iserles. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. – 181 p.

[2] Lovetskiy, K.P. Regularized computation of oscillatory integrals with stationary points / K.P. Lovetskiy, L.A. Sevastianov, D.S. Kulyabov, N.E. Nikolaev // J. Comput. Sci. – 2018. – Vol. 26. – P. 22-27. DOI: 10.1016/j.jocs.2018.03.001.

[3] Mokeev, A.S. Comparison of numerical integration methods for calculating diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular aperture / A.S. Mokeev, V.M. Yamshchikov // Comput. Opt. – 2021. – Vol. 5(45). – P. 773-778. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-877.

[4] Levin, D. Fast integration of rapidly oscillatory functions / D. Levin // J. Comput. Appl. Math. – 1996. – Vol. 67(1). – P. 95-101. DOI: 10.1016/0377-0427(94)00118-9.

[5] Boyd, J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition / J.P. Boyd // Second Rev. Dover Books on Mathematics, 2013.

[6] Mason, J.C. Chebyshev polynomials / J.C. Mason, D.C. Handscomb. – Chapman and Hall: CRC Press, 2002. – 335 p.

[7] Fornberg, B. A practical guide to pseudospectral methods / B. Fornberg. – New York: Cambridge University Press, 1996. – 231 p.

[8] Planitz, M. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / M. Planitz, W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. – New York: Cambridge University Press, 2007. – 1256 p.

[9] Shen, J. Spectral Methods / J. Shen, T. Tang, L.-L. Wang. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. – 470 p.

[10] Olver, S. A Fast and Well-Conditioned Spectral Method / S. Olver // Townsend SIAM Rev. – 2013. – Vol. 55(3). – P. 462-489. DOI: 10.1137/120865458.

[11] Sevastianov, L.A. An effective stable numerical method for integrating highly oscillating functions with a linear phase / L.A. Sevastianov, K.P. Lovetskiy, D.S. Kulyabov // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – Vol. 12138 LNCS. – P. 29-43.