Методы дифференциальной геометрии в задачах редукции динамических моделей с сингулярными возмущениями

М. О. Балабаев

Самарская государственная областная академия (Наяновой),

443001, ул. Молодогвардейская, 196, Самара, Россия

Аннотация

Доклад посвящен исследованию динамических моделей экологии и химической кинетики на основе анализа кривизны медленных интегральных поверхностей.

Ключевые слова: интегральные многообразия; сингулярные возмущения; кривизна поверхности; динамические модели

1. Введение

Динамические автономные сингулярно возмущенные системы используются для описания множества процессов в различных отраслях. Такие системы принято записывать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \tag{1}$$

где совокупность векторных функций $x(t)$ и $y(t)$ задает в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ кривую, под точкой подразумевается дифференцирование по времени t. При этом предполагается, что пространства имеют евклидову метрику, ε — малый положительный параметр, а функции f и g являются определенными и достаточно гладкими в некоторых областях $\mathbb{R}^n$.

Широко известны несколько методов редукции, каждый из которых имеет свои сильные и слабые стороны. Среди таких методов можно отметить асимптотическое разложение явного представления медленного многообразия по степеням малого параметра [1], получение неявного уравнения медленного многообразия [2], а также итерационный и ILDM-методы [1, 2].

В докладе изложен метод построения медленного многообразия для автономной системы, который в отличие от вышеуказанных требует только гладкости правых частей (1), без наложения дополнительных ограничений.

2. Кинематический подход

Запишем исходную систему как

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon} g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\dot{X} = V(x, y, \varepsilon) \tag{2}$$

С точки зрения кинематики, полученная система определяет вектор мгновенной скорости V для каждой точки фазового пространства. Тангенциальная составляющая вектора ускорения $A(x, y, \varepsilon) = \dot{V}$ будет определять особенности траектории в соответствующей точке. Для двумерного случая изучение этих особенностей сводится к анализу кривизны[1] $\kappa_1 = \alpha_1 ||V \wedge A|| = \vartheta_1[V, \dot{V}]$, для трехмерного — кручения $\kappa_2 = \alpha_2 \dot{A} \cdot (V \wedge A) = \vartheta_2[V, \dot{V}, \ddot{V}]$, для общего случая — старшей кривизны $\kappa_{n-1} = \vartheta_{n-1}[V, \dot{V}, \ddot{V}, \dddot{V} \ldots]$

Для изучения особенностей автономных динамических систем с использованием аппарата дифференциальной геометрии вводится специальное многообразие

$$\varphi(x, y, \varepsilon) = \left[V, \dot{V}, \ddot{V}, \ldots, \overset{(n-1)}{V} \right] = 0 \tag{3}$$

Это многообразие, определяемое множеством точек вырождения определителя Вронского правой части системы (2) имеет размерность $n - 1$ и называется многообразием кривизн фазового потока системы.

Утверждение 1. *Уравнение (3) неявно задает медленное многообразие системы (2).*

Утверждение 2. *Условие (3) определяет множество точек, в которых старшая кривизна κ_{n-1} исчезает, а значит происходит потеря устойчивости системы (2).*

Утверждение 3. *Функция $\varphi(x, y, \varepsilon)$ является локальным первым интегралом системы (2).*

[1] здесь и далее ϑ_i и α_i зависят от вектора-столбца V и его производных до i-го порядка включительно

3. Модель бимолекулярной реакции

Рассмотрим на примере модели бимолекулярной реакции способ получения явного представления медленного многообразия системы (1) при помощи неявного уравнения (3). Проведем замену переменных в соответствии с [1, п.2.4.2] и запишем модель в кинематической форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - k_2 x_1 y \\ \dot{x}_2 = k_2 x_1 y - x_2 + 2y \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{\varepsilon} + k_1 (x_2 - y)^2 \end{cases} \tag{4}$$

Уравнение кривизны фазового потока принимает вид

$$\varphi(x_1, x_2, y, \varepsilon) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{y} \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{y} \\ \dddot{x}_1 & \dddot{x}_2 & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

В предположении, что в некоторой области существует явное задание инвариантного многообразия системы, будем искать его в виде разложения по степеням малого параметра [3]:

$$y = h(x_1, x_2, \varepsilon) = h_0(x_1, x_2) + \varepsilon h_1(x_1, x_2) + \varepsilon^2 h_2(x_1, x_2) + \varepsilon^3 h_3(x_1, x_2) + O\left(\varepsilon^4\right)$$

Выпишем полную производную (5), и подставим в неё дифференциал dy:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\right) d\varepsilon = 0$$

откуда в силу утверждения 3 будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_y}, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = -\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi_y}, \quad \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} = -\frac{\varphi_{\varepsilon}}{\varphi_y} \tag{6}$$

Подставим в правые части этих равенств явное уравнение инвариантного многообразия, после чего переобозначим полученные функции

$$\xi_1(x_1, x_2, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_y}\bigg|_{y=h(x_1,x_2,\varepsilon)} \qquad \xi_2(x_1, x_2, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\varphi_{x_2}}{\varphi_y}\bigg|_{y=h(x_1,x_2,\varepsilon)} \qquad \eta(x_1, x_2, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} -\frac{\varphi_{\varepsilon}}{\varphi_y}\bigg|_{y=h(x_1,x_2,\varepsilon)}$$

Продифференцируем $h(x_1, x_2, \varepsilon)$ поочерёдно по x_1, x_2 и ε и выпишем полученные равенства в систему, используя равенства (6) и вновь введённые обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} = \dfrac{\partial h_0}{\partial x_1} + \varepsilon \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} + O\left(\varepsilon^2\right) = \xi_1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = \dfrac{\partial h_0}{\partial x_2} + \varepsilon \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} + O\left(\varepsilon^2\right) = \xi_2 \\ \dfrac{\partial h}{\partial \varepsilon} = h_1 + 2\varepsilon h_2 + O\left(\varepsilon^2\right) = \eta \end{cases} \tag{7}$$

Для системы (4) нулевое приближение тривиально: $h_0(x_1, x_2) = 0$. Устремив $\varepsilon \to 0$ в третьем уравнении получим равенство, позволяющее найти h_1:

$$h_1(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{\varphi_{\varepsilon}}{\varphi_y}\bigg|_{y=0} \right) = k_1 x_2^2$$

Вернёмся к третьему равенству системы (7). Подставим уже вычисленное приближение $y = \varepsilon k_1 x_2^2$, продифференцируем его по ε и вновь полагая $\varepsilon \to 0$ получим

$$h_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{\varphi_{\varepsilon}}{\varphi_y}\bigg|_{y=\varepsilon k_1 x_2^2} \right) = 2k_1 x_2^2 - 2k_1^2 x_2^3$$

Продолжая итерации аналогично находим

$$h_3(x_1, x_2) = 5k_1^3 x_2^4 - 14k_1^2 x_2^3 - 2k_1^2 k_2 x_1 x_2^3 + 4k_1 x_2^2$$

Полученное явное уравнение медленного многообразия идентично классическому до третьего порядка малости включительно. На рисунке представлены численное решение, медленная поверхность и многообразие кривизн потока системы (1).

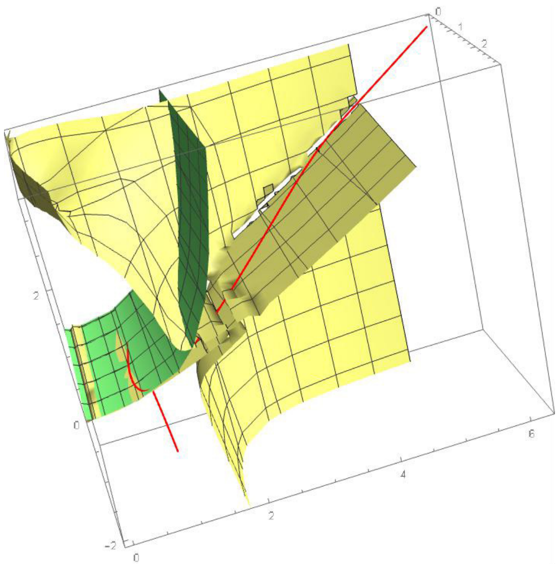

Рис. 1. численное решение, медленная поверхность и многообразие кривизн потока системы (1)

Литература

[1] Sobolev, V. A. Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics [Text] / V. A. Sobolev, E. A. Shchepakina. — 1st edition. — Moscow : Fizmatlit, 2010.

[2] Mortell, M. P. Singular perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications [Text] / M. P. Mortell, E. A. Shchepakina, V. A. Sobolev. — 1th edition. — Seattle : Springer, 2014.

[3] Ginoux, J. M. Differential Geometry Applied to Dynamical Systems [Text] / J. M. Ginoux. — 1th edition. — Singapore : World scientific, 2009.