Метод квазилинеаризации для решения задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести

Р.М. Жаббаров[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе рассмотрена задача о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести. Решение задачи получено с помощью метода квазилинеаризации. С помощью метода квазилинеаризации найдены четыре приближения решения задачи, а также выполнен ряд решений для различных значений степени нелинейности материала. Показано, что построенные приближения сходятся к предельному решению задачи. При анализе результатов, выявлен интересный факт, заключающийся в том, что максимальное значение тангенциального напряжения достигается во внутренней точке пластины, а не на круговом контуре.

1. Введение

В настоящее время благодаря компьютерным технологиям можно получить точное численное решение сложных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, более актуальной проблемой остается получение аналитических приближенных решений нелинейных задач [1-5]. Разумное сочетание вычислительных технологий и приближенных решений нелинейных систем дифференциальных уравнений дает перспективный путь исследования задач естествознания. В этом отношении перспективным представляется метод квазилинеаризации, в рамках которого решение строится посредством искусственных комбинаций методов линейного приближения и использования возможностей современных вычислительных систем. Последовательные приближения строятся таким образом, чтобы добиться быстрой сходимости, а по возможности и монотонности процесса [3, 5]. Более того, зачастую интерес для приложения представляют именно аналитические решения, а не численные [3, 4, 5]. Поэтому целью настоящей работы является приближенное решение задачи о всестороннем растяжении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести с помощью метода квазилинеаризации.

2. Физическая постановка задачи и метод квазилинеаризации

Рассматривается пластина с круговым отверстием (Рис. 1), поведение материала которой характеризуется законом Бейли-Нортона

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{3}{2}\sigma_{\mathrm{e}}^{n\text{-}1}S_{ij},$$

где $\sigma_e^2=\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2$ -интенсивность касательных напряжений, $S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера.

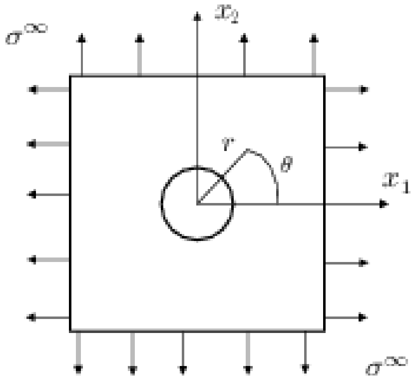


Рисунок 1. Пластина с круговым отверстием.

Решение задачи заключается в определении напряженно-деформированного состояния в пластине с центральным круговым отверстием в условиях ползучести. Систему уравнений рассматриваемой задачи формируют уравнение равновесия, условие совместности деформаций и определяющие уравнения степенного закона ползучести. Уравнение равновесия принимает форму:

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{1}{r}(\sigma_\theta-\sigma_r) \tag{1}$$

Условие совместности имеет вид:

$$\frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr}=\frac{1}{r}\left(\dot{\varepsilon}_r-\dot{\varepsilon}_\theta\right) \tag{2}$$

Определяющие уравнения задачи для рассматриваемого нагружения принимают вид:

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_r-\frac{1}{2}\sigma_\theta\right)=F_r(\sigma_r,\sigma_\theta) \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=\frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e}\left(\sigma_\theta-\frac{1}{2}\sigma_r\right)=F_\theta(\sigma_r,\sigma_\theta) \tag{4}$$

Граничные условия для данной задачи выглядят следующим образом:

$\sigma_r(r=a)=0,\ \sigma_r(r=\infty)=\sigma^\infty$

Система уравнений (1)-(4) представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \sigma_r, \sigma_\theta$. Найти аналитическое решение сформулированной системы не удается, однако, можно построить приближенное аналитическое решение с помощью метода квазилинеаризации . Данный метод является итерационным и на каждом шаге вычисляется приближенное решение $\left(\sigma_r^{(k)},\sigma_\theta^{(k)}\right)$, где k=0,1,2… -номер итерации. В соответствии с методом, требуется провести линеаризацию определяющих соотношений (3)-(4) путем их разложения в ряд Тейлора в окрестности (k-1)-го приближения и определяющие соотношения заменяются на (5)-(6):

$$\dot{\varepsilon}_r=a_r+b_{rr}\sigma_r+b_{\theta r}\sigma_\theta \tag{5}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=a_\theta+b_{\theta r}\sigma_r+b_{\theta\theta}\sigma_\theta \tag{6}$$

где b_{ij} – коэффициенты разложения, a_{ij} – свободные члены. При этом значения коэффициентов вычисляются по формулам, где компоненты тензора напряжения берутся из (k-1)-го приближения. Коэффициенты b_{ij} и a_i вычисляются по текущему приближению:

$$a_r=F_r-\sigma_r\frac{\partial F_r}{\partial\sigma_r}-\sigma_\theta\frac{\partial F_r}{\partial\sigma_\theta}$$

$$a_\theta=F_\theta-\sigma_r\frac{\partial F_\theta}{\partial\sigma_r}-\sigma_\theta\frac{\partial F_\theta}{\partial\sigma_\theta}$$

$$b_{rr}=\frac{\partial F_r}{\partial\sigma_r},\ b_{r\theta}=\frac{\partial F_r}{\partial\sigma_\theta}$$

$$b_{\theta r}=\frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_r},\ b_{\theta\theta}=\frac{\partial F_\theta}{\partial \sigma_\theta}$$

Уравнения (5)-(6) могут быть представлены в форме (7)-(8)

$$\sigma_r=\frac{1}{b_{\theta\theta}}\left(\dot{\varepsilon}_\theta-b_{\theta r}\sigma_r-a_\theta\right) \tag{7}$$

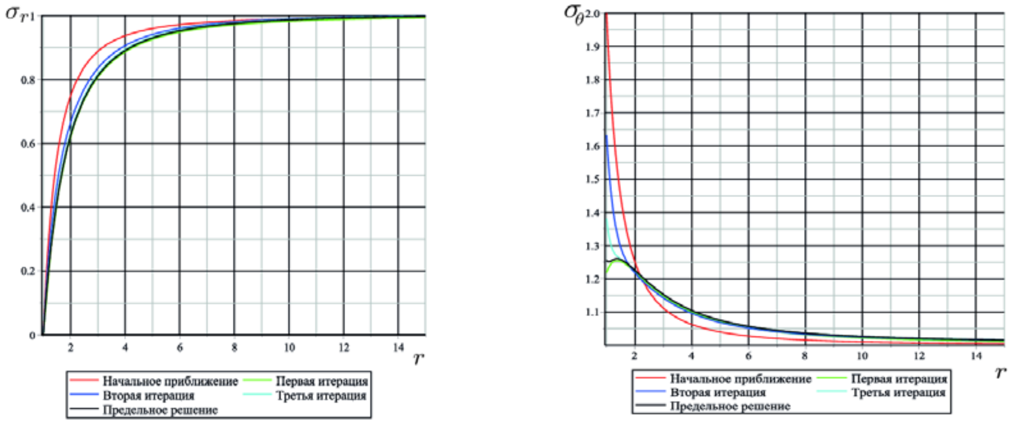
$$\dot{\varepsilon}_r=a_r-\frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}a_\theta+\frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}\dot{\varepsilon}_\theta+\left(b_{rr}-\frac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right)\sigma_r \tag{8}$$

В качестве примера было построено решение для степенного закона $f(\sigma_e)=B\sigma^n$. Скомбинировав уравнения (1), (2) с (7), (8), получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для получения k-го приближения

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}\sigma_r\\ \dot{\varepsilon}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{r}-\frac{b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{1}{b_{\theta\theta}}\\ \frac{1}{r}\left(b_{rr}-\frac{b_{r\theta}b_{\theta r}}{b_{\theta\theta}}\right) & -\frac{1}{r}+\frac{b_{r\theta}}{b_{\theta\theta}}\frac{1}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_r\\ \dot{\varepsilon}_\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{a_\theta}{b_{\theta\theta}}\frac{1}{r}\\ \frac{1}{r}\left(a_r-\frac{b_{r\theta}a_\theta}{b_{\theta\theta}}\right)\end{pmatrix}$$

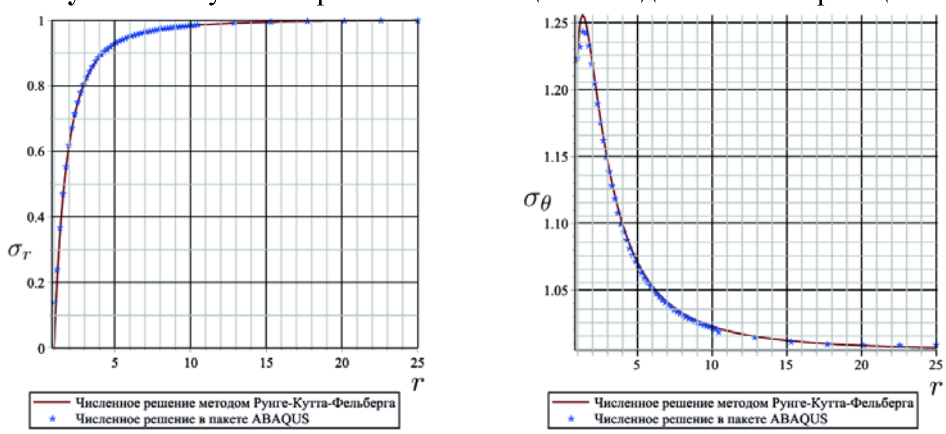
3. Результаты решения

С помощью метода квазилинеаризации получено решение задачи о всестороннем растяжении неупругой пластины с центральным круговым отверстием. Целью решения являлось получение распределений компонент тензора напряжений и компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Результаты решения для n=5 представлены на графиках (Рис 2-4).



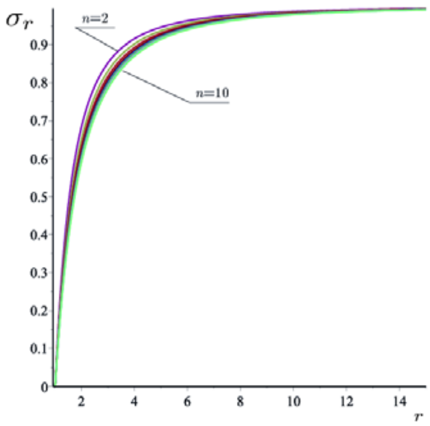
(а) (б)

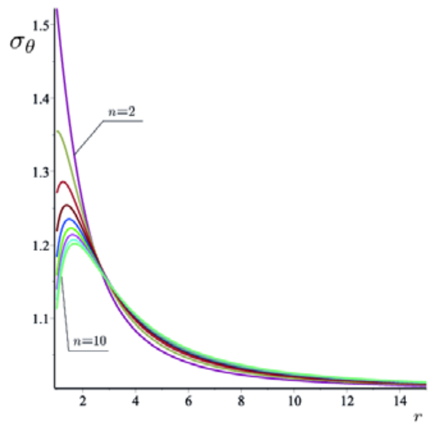
Рисунок 2. Результаты решения с помощью метода квазилинеаризации.



(а) (б)

Рисунок 3. Сравнение с результатами численного решения.





(а) (б)

Рисунок 4. Результаты решения для n=2..10.

4. Литература

[1] Кудряшов, Н.А. Методы нелинейной математической физики / Н.А. Кудряшов. – Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2010. – 368 с.

[2] Андрианов, И. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела / И. Андрианов, Я. Аврейцевич. – Институт компьютерных исследований, 2013. – 276 с.

[3] Беллман, Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М: Мир, 1968. – 184 с.

[4] Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова. – Самара: Самарский университет, 2006. – 242 с.

[5] Бойл, Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Д. Бойл, Д. Спенс. – М: Мир, 1986. – 360 с.

Quasilinearization method for the solution to the problem of plate with central circular hole under creep regime

R.M. Zhabbarov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The approximation solution of the problem for an infinite plate with the circular hole under creep regime is obtained by the quasilinearization method. Four approximations of the solution of the nonlinear problems are found. It is shown that with increasing the number of approximations the solution converges to the limit numerical solution. It is worth to note that the tangential stress reaches it's maximum value not at the circular hole but at the internal point of the plate. It is also shown that quasilinearization method is an effective method for nonlinear problems.

Keywords: quasi-linearization method, comprehensively stretching the plate, uniaxial plate stretching, stress field in the vicinity of the crack tip, nonlinear problems, Bailey-Norton law, analytical solution.