

# Метод кривизны потока в задаче горения

М.О. Балабаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарская государственная областная академия (Наяновой), Молодогвардейская, 196, Самара, Россия, 443001

**Аннотация.** В данной работе рассматривается применение метода кривизны потока для получения стабильного решения задачи горения путем управления теплоотводом во внешнюю среду. Получено инвариантное многообразие со сменой устойчивости и соответствующая функция склейки для динамической системы реакции горения первого порядка.

## 1. Введение

Хорошо известно [1], что задача горения имеет важное прикладное значение. Рассмотрим ее модель для случая реакции первого порядка в соответствии с [2, п.19.2.1]:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\eta e^{\nu}, \\ \dot{\theta}_c = \theta_0 + \nu - \theta_c, \\ \dot{\nu} = \frac{1}{\varepsilon} (\eta e^{\nu} - \gamma_c (\theta_0 + \nu - \theta_c + a)), \end{cases} \quad (1)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 1, \\ \theta_c(0) &= 0, \\ \nu(0) &= -\ln \alpha \gamma_c^{-1}. \end{aligned}$$

Зафиксируем параметры  $\alpha$  и  $\gamma_c$ . Для получения стабильного критического режима нам следует «склеить» притягивающий и отталкивающий листы инвариантного многообразия во всех точках поверхности срыва одновременно. Как показано ниже, это возможно при рассмотрении параметра  $a = a(\nu, \varepsilon)$  в качестве *управляющей функции*. С физической точки зрения это означает, что поддержание критического режима горения осуществляется путем управления теплоотводом  $\delta = \delta(a)$  во внешнюю среду.

В рамках этой статьи мы будем искать склеивающую функцию и соответствующее ей инвариантное многообразие в виде разложений в ряд по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} a(\nu, \varepsilon) &= A_0(\nu) + \varepsilon A_1(\nu) + O(\varepsilon^2), \\ \theta_c(\eta, \nu, \varepsilon) &= Q_0(\eta, \nu) + \varepsilon Q_1(\eta, \nu) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выражение для  $Q_0$  получается из уравнения медленной поверхности:

$$Q_0 = A_0(\nu) - \eta e^{\nu} \gamma_c^{-1} + \nu + \theta_0,$$

однако оно требует уточнения из-за наличия коэффициента  $A_0$ .

## 2. Описание метода

Для нахождения последующих коэффициентов  $Q_i$  и  $A_i$  воспользуемся методом кривизны потока, описанном в [3, 4, 5]. Для этого перепишем систему (1) в виде [5]:

$$\dot{X} = V,$$

где  $X$  — вектор-столбец неизвестных  $\{\eta, \theta_c, \nu\}$ , а  $V$  — вектор-столбец правых частей системы.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\varphi(\eta, \theta_c, \nu) = \left| V \wedge \dot{V} \wedge \ddot{V} \right|,$$

и соответствующее многообразие  $\varphi(\eta, \theta_c, \nu) = 0$ .

Ж.Г. Дарбу в работе [6] показал, что данное многообразие является инвариантной поверхностью динамической системы (1). С учетом того, что производная Ли вырождается  $L_X \varphi = 0$ , очевидно что  $\varphi$  является первым интегралом системы [7]. Таким образом,  $\varphi(X)$  является глобальным инвариантом и значит  $d\varphi = 0$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_c} d\theta_c + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 0.$$

Воспользовавшись разложением

$$d\theta_c = \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \theta_c}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \theta_c}{\partial \varepsilon} d\varepsilon,$$

получим

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_c} \cdot \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) d\eta + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_c} \cdot \frac{\partial \theta_c}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\nu + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_c} \cdot \frac{\partial \theta_c}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon = 0.$$

Легко доказать [5, гл.11], что

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} / \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_c}.$$

Подставляя в это равенство разложение для  $\theta_c = \theta_c(\eta, \nu, \varepsilon)$  получим

$$\theta_{c1} + 2\theta_{c2}\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \xi(\eta, \nu, \varepsilon), \tag{3}$$

где

$$\xi(\eta, \nu, \varepsilon) = - \frac{\varphi_\varepsilon(\eta, \theta_c, \nu, \varepsilon)}{\varphi_{\theta_c}(\eta, \theta_c, \nu, \varepsilon)} \Big|_{\theta_c = \theta_c(\eta, \nu, \varepsilon)}.$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим уравнение для  $Q_1$ , решив которое будем иметь

$$Q_1 = \frac{-2A_0\gamma_c + 3A_1\gamma_c(\gamma_c - \eta e^\nu) - 2\eta e^\nu(e^\nu - 1)}{2\gamma_c(\gamma_c - \eta e^\nu)}.$$

В силу того, что нам нужно «склеить» листы полученного инвариантного многообразия, потребуем регулярности  $Q_1$  во всех точках поверхности срыва. Это возможно, только если

$$A_0 = 1 + \frac{e^\nu \nu}{1 - e^\nu},$$

а значит окончательно получаем

$$Q_0 = e^\nu \left( \frac{\nu}{1 - e^\nu} - \frac{\eta}{\gamma} \right) + \nu + \theta_0 + 1,$$

и более простой вид для

$$Q_1 = \frac{3A_1\gamma_c^2 + \gamma_c(2e^\nu\nu(e^\nu - 1)^{-1} - 3A_1\eta e^\nu - 2) - 2\eta e^\nu(e^\nu - 1)}{2\gamma_c(\gamma_c - \eta e^\nu)},$$

требующий уточнения ввиду наличия  $A_1$ .

Продифференцируем (3) по  $\varepsilon$  и вновь устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$  аналогичным образом получим выражение для  $Q_2$ , которое не приводится здесь по соображениям компактности.

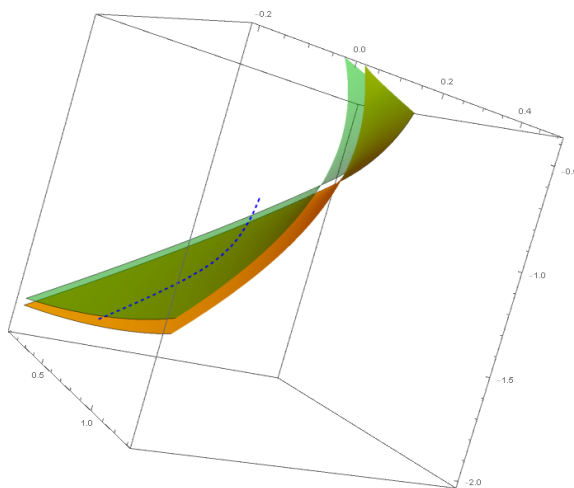
Потребовав его непрерывности на поверхности срыва, получим выражение для  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{1 - e^\nu}{\gamma_c}$$

Тогда после подстановки получим окончательное выражение

$$Q_1 = \frac{\gamma_c(-2e^\nu(\nu + 2) + 3e^{2\nu} + 1) - \eta e^\nu(e^\nu - 1)^2}{2\gamma_c(e^\nu - 1)(\eta e^\nu - \gamma_c)}$$

Продолжая аналогично, можно найти разложения (2) необходимой степени точности. Чертеж для степени точности, используемой в статье приведен далее (см. рисунок 1).



**Рисунок 1.** Медленная поверхность (зеленая), черный лебедь (желтый) и траектория (синий пунктир) при  $\varepsilon = 0.05$ . Параметры реакции:  $\theta_0 \approx 0.0033$ ,  $\gamma_c \approx 1.1$ . Начальные условия:  $\eta(0) = 1$ ,  $\theta_c(0) = 0$ ,  $\nu(0) = -1.0033$ .

### 3. Заключение

Полученное в результате многообразие является *черным лебедем* для системы (1), т.е. поверхностью со сменой устойчивости. Более того, через каждую точку этой поверхности проходит траектория исходной системы, следовательно найденный лебедь относится к подклассу *точных поверхностей*.

#### 4. Литература

- Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Г. Либрович, Г.М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 478 с.
- Соболев В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепаккина — М.: Физматлит, 2010. — 320 с.
- Balabaev M. Black swan and curvature in a n autocatalator model / M.Balabaev. — Procedia Engineering. - 2017. Vol. 201. - P. 561-566.
- [4] Балабаев М.О. Методы дифференциальной геометрии в задачах редукции динамических моделей с сингулярными возмущениями / М.О. Балабаев // Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы "Информационные технологии и нанотехнологии". -Самара, 2017. - С. 1173-1175.
- [5] Ginoux, J.M. Differential geometry applied to dynamical systems /J.M. Ginoux. — Singapore: World Scentic, 2 009. - Vol. 3..
- [6] Darboux, J.G. M'emoire sur les'equations diff´erentielles dlg ´ebriques du premier ordre et du premier degr ´e /J.G. Darboux. — Bull. Sci. Math. Ser. 2 - 1878. - Vol. 2 - P. 60-96, 123-143, 151-200.
- [7] Demazure, M. Catastrophes et bifurcations / M. Demazure. — Paris: Ellipses., 1987.

## Flow curvature method applied to the burning problem

**M.O. Balabaev**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Nayanova Academy, Molodogvardejskaya street 196, Samara, Russia, 443001

**Abstract.** The aim of this paper is to extend canard constructing method given by J. Ginoux, J. Llibre, and L. Chua. In this paper, we consider a black swan construction with help of the modified flow curvature method. The asymptotic expansions for the black swan and corresponding gluing function are proposed. An external heat dissipation is used as a control for the combustion process.

**Keywords:** dynamical systems, integral manifolds, black swans, flow curvature method, burning problem.