

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ СЕТКИ, ОСНОВАННЫЙ НА КРУГАХ ГЕРШГОРИНА*

Е.В. Авдеев¹, В.А. Фурсов¹, В.А. Овчинников²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва
(национально исследовательский университет),

²ООО Ладуга

В данной работе представлен новый метод динамической адаптации сетки, который может быть использован для неструктурированных сеток в двумерных и трехмерных задачах. Адаптация сетки основана на оценке кругами Гершгорина собственных значений матрицы дискретизации. Реализация алгоритма выполнена с помощью открытой библиотеки механики сплошных сред OpenFOAM, код библиотеки написан на языке C++ и удобна тем, что состоит из множества готовых модулей. Приводятся два численных примера, показывающие эффективность нового метода адаптации сетки.

Введение

Метод конечных объемов (МКО) это сеточный метод, в котором рабочий объем разделяется на некоторое количество ячеек, ребра которых образуют сетку. В общем случае при выполнении расчета в задаче вычислительной гидродинамики (ВГД) невозможно заранее получить оптимальную сетку, т.е. сетку с минимальным количеством ячеек, удовлетворяющую заданным допускам вычислительной погрешности. Для задач, решаемых в динамической постановке, в которых поведение потока нестационарно и интересующие области могут менять свое положение по ходу процесса моделирования, использование статичной сетки становится неэффективным, т.к. в таком случае исходная сетка должна быть чрезмерно измельченной, чтобы удовлетворить допустимому порогу погрешности на всем протяжении процесса моделирования. В качестве решения используют динамические сетки, адаптирующие свою структуру по некоторому критерию. В качестве критерия адаптации чаще всего используют поле градиентов физической величины. Наш алгоритм основан на оценке собственных значений матрицы дискретизации, что позволяет отмечать ячейки для измельчения и укрупнения сетки. Данный подход эффективнее использует имеющееся количество ячеек, что приводит к снижению вычислительных затрат на решение задачи.

Постановка задачи

Пусть при использовании МКО в результате дискретизации уравнений мы получили систему линейных алгебраических уравнений, которая может быть представлена в матричном виде

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где \mathbf{A} – квадратная разреженная $n \times n$ матрица коэффициентов дискретизации, \mathbf{x} – $n \times 1$ вектор, компонентами которого являются искомые значения, \mathbf{b} – $n \times 1$ вектор известных значений.

Чтобы объяснить роль обусловленности матрицы \mathbf{A} в решении задачи произведем следующие преобразования с выражением (1).

$$0 = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2)$$

Далее перепишем выражение с учетом того, что мы используем итерационный метод решения, т.е.

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \quad (3)$$

Отметим, что погрешность k -ой и $(k+1)$ -ой итерации соответственно:

* Данная работа была поддержана Министерством образования и науки РФ (проект №"2.2335.2014/К").

$$e_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k, \quad e_{k+1} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1} \quad (4)$$

Вычитаем из (2) выражение (3)

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

или, используя (4)

$$e_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})e_k$$

$$e_{k+1} = \mathbf{M}e_k \quad (5)$$

Глядя на выражение (5) видно, что для уменьшения e с каждой итерацией, т.е. для сходимости задачи, необходимо, чтобы для всех собственных значений λ матрицы \mathbf{M} выполнялось:

$$|\lambda(\mathbf{M})| < 1$$

Таким образом мы видим, что число обусловленности играет важную роль в (1). Число обусловленности показывает будет ли при данных условиях задача сходиться, сходиться к верному решению и на сколько быстро.

Алгоритм оценки собственных значений

Алгоритм оценки собственных значений, который мы используем в нашей работе, основан на теореме Гершгорина и определении кругов Гершгорина [2]. Каждое собственное значение матрицы \mathbf{M}_{nn} удовлетворяет неравенству:

$$|\lambda - \mathbf{M}_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |\mathbf{M}_{ij}|, \quad (6)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть $d_i = \sum_{j \neq i} |\mathbf{M}_{ij}|$. Тогда множество $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathbf{M}_{ii}| \leq d_i\}$ называется i -тым кругом Гершгорина матрицы \mathbf{M} . Этот круг включает в себя как внутреннюю часть, так и границу. Круг имеет радиус d_i и центр в точке с координатами (действительная часть \mathbf{M}_{ii} , мнимая часть \mathbf{M}_{ii}).

В нашей работе критерий адаптации сетки основа на скалярном поле

$$\mathbf{F}_i = m_{ii} + \sum_{i \neq j} m_{ij}, \quad (7)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Адаптация сетки производилась на основе этого поля, но перед каждой итерацией предварительно производилась нормализация поля \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_i^{\text{normalised}} = \frac{\mathbf{F}_i}{\max(\mathbf{F}_i)} \quad (8)$$

Таким образом значения поля \mathbf{F} заключены в пределах полуинтервала $(0; 1]$ и это упростило настройку адаптации в OpenFOAM. Измельчаться должны ячейки сетки, имеющие значения \mathbf{F}_i близкие к 1, а объединяться - ячейки, имеющие значения \mathbf{F}_i близкие к 0. Значения поля \mathbf{F} уменьшаются при измельчении и увеличиваются при укрупнении ячеек сетки.

Примеры и анализ

Чтобы показать работу и эффективность алгоритма, мы подготовили в качестве примеров две задачи [3]. В обеих задачах используется модифицированный стандартный решатель *laplacianFoam* OpenFOAM, который мы назвали *laplacianFoamF*. В новом решателе добавлена возможность работать с динамической сеткой, что позволяет проводить ее адаптацию по ходу решения задачи.

Мы сравниваем адаптацию сетки на основе скалярного поля градиента температуры \mathbf{T} , в ходе которой минимизируются величины градиентов (Adaptive Mesh Refinement - AMR T), и адаптацию, основанную на описанном выше скалярном поле \mathbf{F} (6)

– (AMR F). В каждом примере методы адаптации сравнивались на примерно одинаковых по количеству элементов сетках.

Исходная геометрия первого примера, как показано на рисунке 1, тонкая квадратная пластинка. Длина вдоль оси X и Z составляет 100 метров, вдоль оси Y 10 метров.

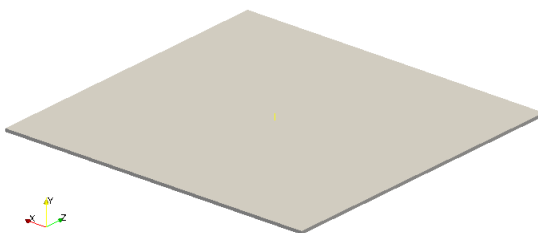


Рисунок 1 - Геометрия первого примера

Граничные условия: на грани $xy, z=0$: температура $T = 1 \text{ }^\circ\text{C}$; на остальных 5 гранях: $\text{grad}(T) = 10$. Такие граничные условия были выбраны для упрощения оценки конечного результата. В данном случае, температура должна уменьшаться от нагреваемой грани линейно.

Мы хотим найти распределение температуры. Теплопередача выражается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0, \quad (9)$$

где T - температура, t - время, α - коэффициент теплопроводности.

Для сравнения на рисунке 2 представлены графики невязок методов адаптации. Как можно видеть, в случае адаптации AMR F невязка сходится немного быстрее, чем в случае адаптации сетки AMR T.

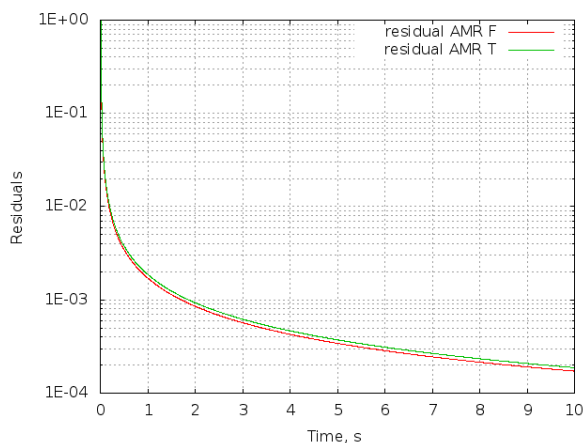


Рисунок 2 - Первый пример, AMR F и AMR T невязки

Во втором примере покажем работу метода AMR F на более сложной геометрии. Геометрия и граничные условия представлены на рисунке 3.

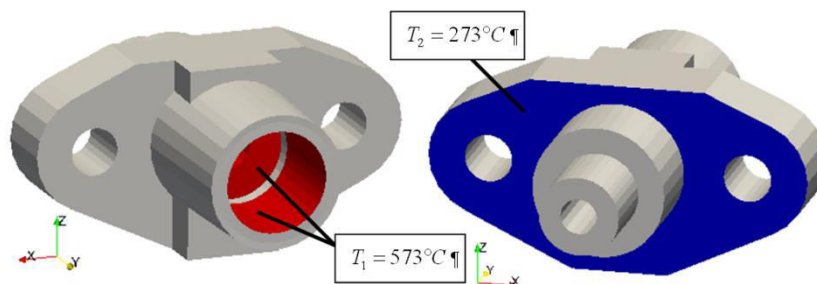


Рисунок 3 - Второй пример, геометрия и граничные условия

Как показано на рисунке 3 на одной границе фланца температура $T_1 = 573^\circ\text{C}$, на второй границе $T_2 = 273^\circ\text{C}$. На всех остальных поверхностях фланца градиент температуры равен 0, т.к. стенки не излучают тепло (адиабатические стенки).

Во время эксперимента мы обнаружили, что адаптация сетки на основе скалярного поля F обнаруживает и измельчает самые большие ячейки, но не учитывает граничные условия (см. рисунок 4). Так происходит из-за того, что граничные условия хранятся в правой части (1), в векторе \mathbf{b} и почти не влияют на формирование матрицы дискретизации \mathbf{A} .

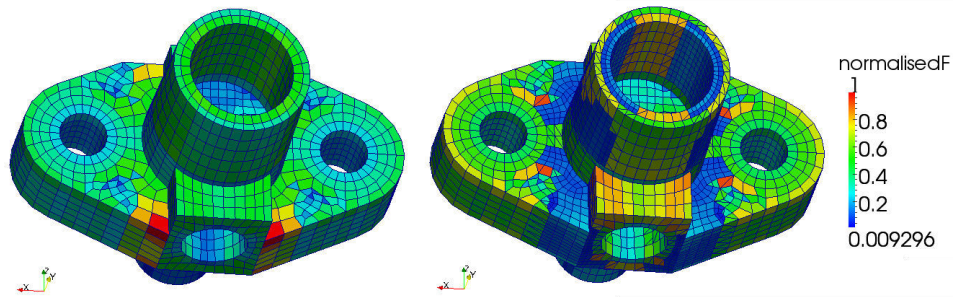


Рисунок 4 - AMR F обнаруживает и измельчает самые крупные ячейки

Адаптация сетки на основе поля градиентов температуры T наоборот, учитывает граничные условия, не измельчает большие «плохие» ячейки.

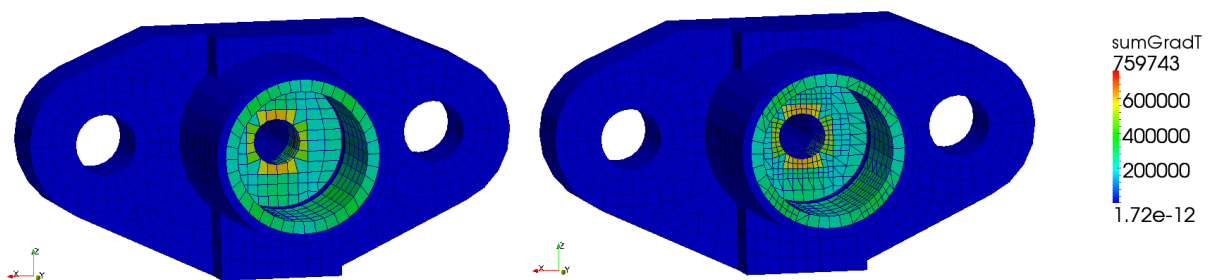


Рисунок 5 - AMR T учитывает граничные условия

Таким образом для сравнения мы привели результаты третьего «гибридного» варианта, в котором первые 5 итераций сетка адаптировалась методом AMR F, а затем расчет продолжался с адаптацией сетки методом AMR T. Для сравнения графики невязок приведены на рисунке 6.

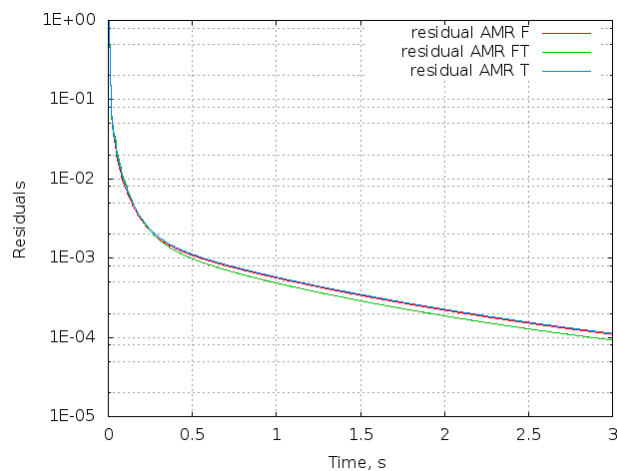


Рисунок 6 - Сравнение графиков невязок AMR F, AMR T и «гибридного» AMR FT.

Как видно из рисунка 6, AMR FT имеет наилучшую сходимость, AMR F немного хуже и AMR T ещё немного хуже.

Заключение

Выше представлен метод адаптации сетки, основанный на обусловленности матрицы дискретизации. Как было рассмотрено в двух примерах – метод не обеспечивает масштабного увеличения производительности, по сравнению с адаптацией на основе поля градиентов, но следует заметить, что использование метода AMR T не всегда возможно. Сложности возникают в более сложных задачах с динамической геометрией, мультифазными потоками и т.п. Представленный нами метод позволяет подобрать наиболее подходящий вариант адаптации, а не только AMR T.

Литература

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1977
2. Brakken-Thal P. *Gershgorin's Theorem for Estimating Eigenvalues*. [Электронный ресурс] <http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/brakkenthal-paper.pdf>
3. [Электронный ресурс] <https://github.com/j-avdeev/laplacianFoamF>