Математическое моделирование механизмов стимулирования в проектах по освоению нового производства

О.В. Павлов[a]

[a] Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В работе рассматривается задача стимулирования исполнителей проекта по освоению новой продукции на промышленном предприятии. В процессе освоения новой продукции проявляется эффект обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся задач снижаются, что приводит к динамическому изменению экономических показателей производства. Проект освоения новой продукции рассматривается как управляемая иерархическая динамическая система, состоящая из руководства проекта и коллективов исполнителей. Взаимодействие участников проекта формализуется как иерархическая динамическая игра. Для решения задачи разработан численный алгоритм, основанный на последовательном решении двух задач оптимального управления, которые решаются с помощью метода динамического программирования Беллмана.

Ключевые слова: проекты освоения новой продукции; эффект обучения; иерархическая динамическая игра

1. Введение

В проекте по освоению новой продукции на промышленных предприятиях работникам приходиться осваивать новые виды работ и оборудование, что связано с приобретением новых профессиональных навыков. В процессе освоения проявляется эффект обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся задач снижаются [1,2]. Эффект обучения приводит к динамическому изменению экономических показателей производства: объему выпуска продукции в единицу времени, трудоемкости и себестоимости продукции.

При каждом удвоении кумулятивного объёма производства производительность труда работников увеличивается на 10-15 процентов [1]. Под кумулятивным объёмом производства понимается количество изделий, изготовленных с начала производства нарастающим итогом.

Проект освоения новой продукции на промышленном предприятии рассматривается как управляемая иерархическая динамическая система, состоящая из руководства проекта (центра) и исполнителей (агентов). Состояние иерархической динамической системы в каждый период времени зависит от её состояния и действий участников в предыдущий период.

Производственная деятельность в проекте по освоению нового производства характеризуется несовпадающими интересами центра и агентов, что приводит к снижению экономической эффективности. Разрешить эти противоречия возможно с помощью согласованных механизмов управления, которые побуждают агентов к выбору действий выгодных центру.

Динамические модели взаимодействия неравноправных игроков рассматриваются в теории динамических игр Штакельберга [3] и теории динамических игр Гермейера [4]. Прикладные модели теории динамических игр в области экономики и менеджмента приводятся в работах [5,6].

В рассматриваемой динамической игровой модели присутствуют динамика принятия решений и динамика управляемой системы. Неравноправие участников фиксируется порядком ходов, первый ход делает центр, выбирая свою стратегию: ставку оплаты единицы продукции и сообщая ее агентам. Центр, зная целевые функции агентов, максимизирует свою целевую функцию с учетом оптимальных ответов агентов. Предполагается, что агенты не связаны друг с другом и выполняют действия независимо. Динамическая игровая модель рассматривается в дискретной форме, что отражает характер производственной деятельности.

2. Постановка динамической задачи пропорционального стимулирования

2.1. Модель принятия решения центром

Рассматривается двухуровневая динамическая производственная система, состоящая из центра и n независимых агентов. Агенты производят детали, из которых затем собирается готовое изделие. Трудовые затраты и материальное стимулирование агентов зависят только от их собственных действий.

Динамика производства нового изделия описывается дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = \overline{1,T}, \tag{1}$$

где x_t - кумулятивный объём производства изделия за t-ый временной период, t – номер временного периода, u_t – объём производства изделия в периоде t, T - количество рассматриваемых периодов (горизонт планирования).

В начальный период известно количество произведенных изделий:

$$x_0 = X_0, \tag{2}$$

В конечный период кумулятивный объём готовых изделий должен быть равен заданному:

$$x_T = X_0 + R, \tag{3}$$

где R – заданное количество готовых изделий.

На объём производства изделий в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

$$Q^{\min} \le u_t \le Q^{\max}, \ t = \overline{1,T}, \tag{4}$$

где $Q_i^{\min}$ – минимальный объём производства изделий с учётом технологических и логистических требований, $Q^{\max}$ – максимальный объём производства, ограниченный производственной мощностью оборудования.

Трудовые затраты изготовления изделия в периоде t определяются как произведение трудоемкости изделия c_{pt} и объёма производства в этом периоде u_t:

$$C_{pt} = c_{pt} u_t, \ t = \overline{1,T}. \tag{5}$$

В связи с эффектом обучения трудоемкость изделия уменьшается в зависимости от кумулятивного объёма производства [1]:

$$c_{pt} = a_p x_{t-1}^{-b_p}, \tag{6}$$

где a_p – трудовые затраты агентов на производство первого изделия, b_p – скорость снижения трудоемкости изделия с увеличением кумулятивного объёма производства (скорость освоения изделия).

Подставим выражение (6) в формулу (5) и найдем затраты труда на изготовление готового изделия в периоде t:

$$C_{pt} = a_p x_{t-1}^{-b_p} u_t, \ t = \overline{1,T}. \tag{7}$$

Объемы производства готового изделия u_t выбирает центр при планировании производственной деятельности исходя из своей целевой функции.

В качестве целевой функции центра можно рассмотреть несколько вариантов.

1.Минимизация дисконтированных кумулятивных трудовых затрат всех агентов, производящих новое изделие:

$$J_p = \sum_{t=1}^{T} \frac{a_p x_{t-1}^{-b_p} u_t}{(1+r_p)^t} \to \min, \tag{8}$$

где r_p – ставка дисконтирования центра.

2 Максимизация дисконтированной прибыли от производства нового изделия:

$$J_p = \sum_{t=1}^{T} \frac{P_{t-1} u_t - a_p x_{t-1}^{-b_p} u_t}{(1+r_p)^t} \to \max, \tag{9}$$

где P_{t-1} - цена продукции нового изделия.

3.Максимизация объема производства нового изделия:

$$J_p = x_T \to \max. \tag{10}$$

4.Минимизация времени реализации проекта по освоению нового изделия:

$$J_p = T \to \min. \tag{11}$$

Сформулируем динамическую задачу планирования объемов производства нового изделия для центра. Задача заключается в поиске оптимальных объёмов производства $u_t^{opt}, t = \overline{1,n}$ удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод динамической производственной системы (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и доставляют экстремум одной из целевых функции центра (8)-(11).

Для решения сформулированной задачи оптимального управления применялся метод динамического программирования Беллмана [7], реализованный в среде программирования Free pascal. Постановки и решения автором задач динамического планирования приводятся в [8].

В результате решения задачи динамического планирования центр определяет оптимальные объемы производства нового изделия $u_t^{opt}, t = \overline{1,n}$. Для реализации проекта необходимо, чтобы объемы производства изделия и деталей совпадали. Но выбор фактических объемов производства деталей, из которых собирают готовое изделие, осуществляют агенты исходя из своих интересов. Центр воздействует на производственный процесс через механизм материального стимулирования, экономически заинтересовывая агентов выполнять плановые объемы производства.

2.2. Модель принятия решения агентом

Динамика производственной деятельности *i*-го агента, изготавливающего деталь для нового изделия, описывается дискретным уравнением:

$$y_t = y_{t-1} + v_t, \quad t = \overline{1,T}, \tag{12}$$

где y_t - кумулятивный объём производства детали агентом за *t*-ый временной период, v_t - объём производства агентом детали в периоде *t*.

Выбор объёма производства v_t в периоде *t* является управлением агента.

В начальный период известно количество деталей, произведенное агентом:

$$y_0 = Y_0, \tag{13}$$

В конечный период кумулятивный объём произведенных агентом деталей должен быть равен заданному:

$$y_T = Y_0 + R, \tag{14}$$

где R – заданное количество деталей, которое совпадает с количеством готовых изделий.

На объём производства деталей в каждом периоде *t* наложены следующие ограничения:

$$Q^{\min} \le v_t \le Q^{\max}, \; t = \overline{1,T}, \tag{15}$$

где $Q_i^{\min}$ – минимальный объём производства деталей с учётом технологических и логистических требований, $Q^{\max}$ – максимальный объём производства деталей, ограниченный производственной мощностью оборудования. Ограничения на объем производства деталей совпадают с ограничением на объем производства изделия.

Трудовые затраты агента в денежном выражении в периоде *t* определяются как произведение трудоемкости детали c_{at}, стоимости норма-часа на предприятии *s* и объёма производства деталей в этом периоде v_t:

$$C_{at} = sc_{at}v_t, \; t = \overline{1,T}. \tag{16}$$

В связи с эффектом обучения трудоемкость деталей уменьшается в зависимости от кумулятивного объёма производства [1]:

$$c_{at} = a_a y_{t-1}^{-b_a}, \tag{17}$$

где a_a – трудовые затраты агента на производство первой детали, b_a – скорость снижения трудоемкости детали с увеличением кумулятивного объёма производства (скорость обучения агента).

Подставляя выражение (17) в формулу (16), найдем трудовые затраты агента в периоде *t*:

$$C_{at} = sa_a y_{t-1}^{-b_a} v_t, \; t = \overline{1,T}. \tag{18}$$

Центр для реализации проекта использует динамическую пропорциональную систему материального стимулирования:

$$\sigma_t(\alpha_t, v_t) = \alpha_t v_t, \; t = \overline{1,T}, \tag{19}$$

где α_t - ставки оплаты труда агента за одну произведенную деталь в периоды $t=\overline{1,T}$ (параметры функции стимулирования).

Параметры функции стимулирования являются управлением центра, с помощью которых центр воздействует на экономические интересы агента, побуждая выбирать плановые объемы производства.

Сумма материального стимулирования агента не должна превышать ограниченный фонд заработной платы F:

$$\sum_{t=1}^{T} \alpha_t v_t \le F,\ i = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Целевой функцией агента является максимизация дисконтированного дохода:

$$J_a = \sum_{t=1}^{T} \frac{\sigma_t(\alpha_t, v_t) - C_{at}}{(1 + r_a)^t} \to \max, \tag{21}$$

где r_a - ставка дисконтирования агента.

Доход агента - это разница между материальным стимулированием и его трудовыми затратами, выраженными в денежной форме.

С учетом (18) и (19) целевая функция агента (21) примет вид:

$$J_a = \sum_{t=1}^{T} \frac{\alpha_t v_t - s a_a x_{t-1}^{-b_a} v_t}{(1 + r_a)^t} \to \max. \tag{22}$$

Сформулированная задача является задачей оптимального управления дискретной системой для агента. Решением сформулированной задачи является такое оптимальное управление v_t^{opt}, $t=\overline{1,n}$, удовлетворяющее ограничению (15), которое переводит дискретную систему (12) из начального состояния (13) в конечное состояние (14) и максимизирует дисконтированный доход агента (22). При этом решение оптимизационной задачи агента зависит от ставок оплаты за единицу произведенной продукции α_t, $t=\overline{1,n}$, которые назначает центр.

Для решения сформулированной задачи оптимального управления применялся метод динамического программирования Беллмана [7], реализованный в среде программирования Free pascal.

2.3. Алгоритм решения динамической задачи стимулирования

Сформулируем задачу динамического стимулирования агента:

$$\begin{aligned}
&J_p = \sum_{t=1}^{T} g_p(t, u_t, x_{t-1}) \to \max(\min),\\
&x_t = x_{t-1} + u_t,\ t = \overline{1,T},\\
&Q^{\min} \le u_t \le Q^{\max},\quad t = \overline{1,T},\\
&x_0 = X_0,\\
&x_T = X_0 + R,\\
&J_a = \sum_{t=1}^{T} \frac{\alpha_t v_t - s a_a y_{t-1}^{-b_a} v_t}{(1 + r_a)^t} \to \max,\\
&\sum_{t=1}^{T} \alpha_t v_t \le F,\\
&y_t = y_{t-1} + v_t,\quad t = \overline{1,T},\\
&Q^{\min} \le v_t \le Q^{\max},\ t = \overline{1,T},\\
&y_0 = Y_0,\\
&y_T = Y_0 + R.
\end{aligned} \tag{23}$$

где g_p- конкретный вид целевой функции центра, определяется одним из выражений (8)-(11).

Сформулированная динамическая задача стимулирования агента (23) представляет собой динамическую игру, решение которой определяет условия согласования между центром и агентом. Решением динамической игры будут параметры системы стимулирования и объемы производства детали $\alpha_t^*, v_t^* = u_t^*$, $t = \overline{1,T}$, которые доставляют экстремум целевым функциям центра и агента.

Сформулируем алгоритм решения динамической задачи пропорционального стимулирования.

1.Решается задача оптимального управления для центра с использованием метода динамического программирования Беллмана, находятся оптимальные плановые объемы производства нового изделия u_t, $t=\overline{1,T}$.

2.Задается управление центра - параметры функции стимулирования α_t,, $t=\overline{1,T}$ так, что бы выполнялось условие не превышения фонда оплаты труда агента:

$$\sum_{t=1}^{T} \alpha_t u_t(\alpha_t) \le F.$$

3.При заданных параметрах функции стимулирования α_t, $t=1,T$ решается задача оптимального управления для агента с использованием метода динамического программирования Беллмана и определяется оптимальный ответ агента – фактические объемы производства детали $v_t(\alpha_t)$, $t=1,T$.

4.Проверяется условие совпадения плановых и фактических объемов производства, которые выбирает агент:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(u_t - v_t(\alpha_t)\right)^2 \le \varepsilon,$$

где ε- наперед заданная малая величина. Если условие выполняется, то задача динамического пропорционального стимулирования решена. Если не выполняется, то следует изменение параметров функции стимулирования α_t, $t=1,T$ и переход к пункту 2.

Рассмотренные целевые функции центра (8)-(11) не зависят от функции материального стимулирования. Сформулируем целевые функции центра, учитывающие затраты центра на стимулирование агента.

1.Минимизация дисконтированных затрат на стимулирование агента:

$$J_p = \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha_t v_t}{\left(1+r_p\right)^t} \to \min . \qquad (24)$$

2.Максимизация дисконтированного дохода от производственной деятельности агента:

$$J_p = \sum_{t=1}^{T}\frac{(p_t-\alpha_t)v_t}{\left(1+r_p\right)^t} \to \max, \qquad (25)$$

где p_t – цена детали, производимой агентом.

В этом случае задача динамического стимулирования агента примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&J_p = \sum_{t=1}^{T} g_p(t, v_t, \alpha_t) \to \max(\min),\\
&J_a = \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha_t v_t - s a_a y_{t-1}^{-b_a} v_t}{\left(1+r_a\right)^t} \to \max .\\
&y_t = y_{t-1} + v_t, \quad t=1,T,\\
&Q^{\min} \le v_t \le Q^{\max}, \quad t=1,T,\\
&y_0 = Y_0,\\
&y_T = Y_0 + R.
\end{aligned} \qquad (26)$$

где g_p- конкретный вид целевой функции центра, определяется одним из выражений (24)-(26).

Решением динамической игры будут параметры функции стимулирования и объёмы производства детали α_t^*, v_t^*, $t=1,T$, которые доставляют экстремум целевым функциям центра и агента.

Сформулируем алгоритм решения динамической задачи пропорционального стимулирования в случае, когда целевая функция центра зависит от затрат на стимулирование (26):

1.Задаются параметры функции стимулирования центра α_t,, $t=1,T$.

2.При заданных параметрах функции стимулирования α_t,, $t=1,T$ решается задача оптимального управления для агента с использованием метода динамического программирования Беллмана и определяется оптимальный ответ агента – фактические объемы производства детали $v_t(\alpha_t)$, $t=1,T$.

3.Найденный ответ агента $v_t(\alpha_t)$ подставляется в задачу оптимального управления для центра, которая решается методом динамического программирования Беллмана. Находятся оптимальные параметры функции стимулирования $\alpha_t(v_t(\alpha_t))$, $t=1,T$.

4.Проверяется условие совпадения параметров функции стимулирования на данной итерации и предыдущей:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\alpha_t(v_t(\alpha_t)) - \alpha_t\right)^2 \le \varepsilon,$$

где ε- наперед заданная малая величина. Если условие выполняется, то задача динамического пропорционального стимулирования решена. Если не выполняется, то следует изменение параметров функции стимулирования и переход к пункту 2.

3. Пример решения задачи динамического стимулирования

Рассматривается задача динамического стимулирования при следующих исходных данных.

$$J_p=\sum_{t=1}^{12}\frac{42{,}64x_{t-1}^{-0,7}u_t}{\left(1+r_p\right)^t}\to\min$$
$$x_t=x_{t-1}+u_t,\ t=1{,}12,$$
$$0\le u_t\le 40,\quad t=1{,}12,$$
$$x_0=1,$$
$$x_T=241,$$
$$J_a=\sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha_t v_t-3837{,}6y_{t-1}^{-0,1}v_t}{\left(1+r_a\right)^t}\to\max,$$
$$\sum_{t=1}^{T}\alpha_t v_t\le 960000,$$
$$y_t=y_{t-1}+v_t,\quad t=1{,}12,$$
$$0\le v_t\le 40,\ \ t=1{,}12,$$
$$y_0=1,$$
$$y_T=241.$$

Численное решение задачи было получено с использованием предложенного алгоритма. На рис. 1 представлена плановая траектория кумулятивного объёма производства нового изделия, которую выбирает центр исходя из своей целевой функции. Плановая траектория соответствует траектории, минимизирующей трудовые затраты агентов и соответствует скорости освоения изделия b=-0,7. При постоянных параметрах функции стимулирования агент выбирает фактическую траекторию кумулятивного объема производства, соответствующей скорости обучения агента γ=-0,1. Фактическая траектория кумулятивного объема производства представлена на рис. 1.

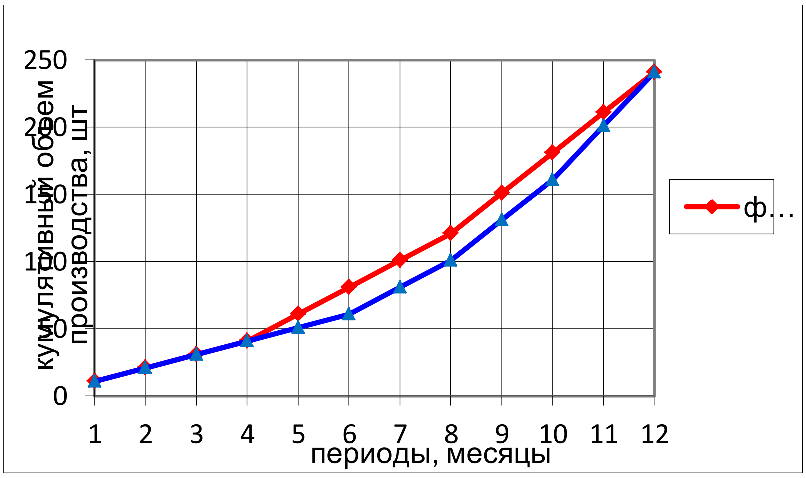

Рис. 1. Плановая и фактическая траектория кумулятивного объема прпоизводства.

Проведенное в работе исследование позволило сделать следующие выводы:

1.Постоянная ставка оплаты труда не влияет на выбор агентом фактической траектории кумулятивного объёма производства. В этом случае траектория определяется только скоростью обучения агента.

2.Согласование интересов центра и агента достигается за счет использования переменной ставки оплаты труда, зависящей от кумулятивного объема производства.

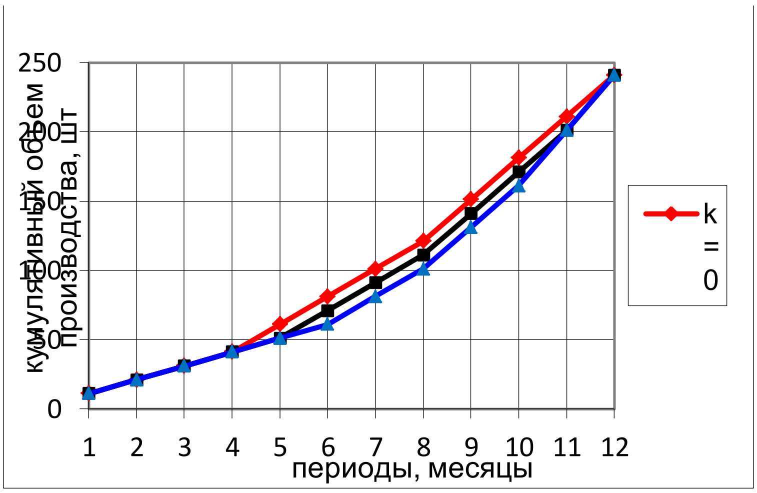

Рис. 2. Влияние параметра k на фактическую траекторию кумулятивного объема производства.

3.Применение ставки оплаты в виде линейно-возрастающей функции от кумулятивного объема производства $\alpha_t = ky_t + d$, приводит к выбору агентом траекторий с большей скоростью обучения. Агент переходит с «медленной» траектории на «быструю», более «выпуклую». Большему значению управляющего параметра k соответствует выбор агентом более «выпуклой» траектории, что проиллюстрировано на рис 2.

4.Применение ставки оплаты в виде линейно-убывающей функции от кумулятивного объема производства приводит к выбору агентом траекторий с меньшей скоростью обучения. Агент переходит с «быстрой» траектории на «медленную», менее «выпуклую». Большему по модулю значению управляющего параметра k соответствует выбор агентом менее «выпуклой» траектории.

4. Заключение

В работе разработаны динамические модели принятия решений для центра и агента в проекте по производству нового изделия. Сформулированы задачи динамического стимулирования агента для различных целевых функций центра. Рассмотрены два варианта: целевые функции включают затраты на материальное стимулирование агента и не включают.

Для обоих вариантов предложен численный алгоритм, основанный на последовательном решении двух задач оптимального управления, которые решаются с помощью метода динамического программирования Беллмана.

Приведен численный пример решения задачи для целевой функции центра, не зависящей от затрат на стимулирование агента. Показано, что применение ставки оплаты труда агентов в виде линейной функции, зависящей от кумулятивного объема производства, обеспечивает выбор агентом плановой траектории центра.

Литература

[1] Wright, T.P. Factors affecting the cost of airplanes / T.P. Wright //Journal of the aeronautical sciences. - 1936. - Vol. 3, № 4. - P. 122-128.
[2] Новиков, Д.А. Модели обучения в процессе работы / Д.А. Новиков // Управление большими системами. - 2007. № 19. - с. 5-22.
[3] Горелик, В.А. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления / В.А. Горелик, М.А. Горелов, А.Ф. Кононенко. - М.: Радио и связь, 1991.
[4] Basar, T. Dynamic Noncooperative Game Theory / T. Basar, G.J. Olsder. – Philadelphia: SIAM, 1999.
[5] Угольницкий, Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем / Г.А. Угольницкий. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 940 с.
[6] Dockner, E. Differential games in economics and management Science / E. Dockner, S. Jorgensen, N.V. Long, G. Sorger - Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
[7] Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
[8] Павлов, О.В. Динамическая оптимизация прпоизводственной деятельности предприятия с учетом эффекта кривой обучения / О.В. Павлов //Вестник Самарского государственного экономического университета. - 2015. № 3/ (125). - с. 88-92.