

Математическое моделирование и анализ движения низкоорбитальной космической тросовой системы

Ч. Дон¹, Ю.М. Заболотнов¹, Ч. Ван²

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

²Северо-западный политехнический университет, Ул. Западной Дружбы 127, Сиань, КНР, 710072

Аннотация. Анализируется движение низкоорбитальной космической тросовой системы (НКТС), состоящей из базового и малого космических аппаратов, и соединяющего их троса. Рассматриваются этапы развертывания, свободного движения и стабилизации на низкой почти круговой орбите. Длина троса по окончании развертывания системы составляет несколько десятков километров. Стабилизация движения системы в заданном диапазоне высот осуществляется с помощью корректирующего реактивного двигателя, расположенного на базовом космическом аппарате. Математическое моделирование движения системы на всех участках полета проводится по математической модели с распределенными параметрами, в которой трос представляется совокупностью материальных точек.

1. Введение

В настоящее время в научной литературе большое внимание уделяется космическим тросовым системам (КТС) из-за их возможных полезных применений [1, 2]. Анализ движения низкоорбитальных КТС очень сложен из-за большой их протяженности (несколько десятков километров) и из-за необходимости учета аэродинамических сил, действующих на все части системы, включая трос [3].

Тросовая система в данной работе состоит из базового и малого космических аппарата (БКА, МКА), соединенных тросом. Предлагается программный динамический закон управления развертыванием системы, который обобщает аналогичные программы [2, 4, 5], так как учитывает действие аэродинамических сил на все части КТС, включая трос. Оценка реализуемости построенной номинальной программы управления проводится с использованием более сложной модели движения КТС, в которой трос рассматривается как совокупность материальных точек, соединенных упругими односторонними связями. Предлагаемая номинальная программа развертывания КТС позволяет существенно уменьшить амплитуду маятниковых колебаний системы относительно местной вертикали, которые неизбежно возникают на сравнительно низких орбитах из-за действия аэродинамических сил [2]. После развертывания КТС моделируется ее свободное движение до достижения заданной достаточно низкой высоты полета центра масс. После достижения заданной высоты рассматривается задача стабилизация движения КТС на низкой почти круговой орбите. Стабилизация движения в заданном диапазоне высот осуществляется с помощью корректирующего реактивного двигателя, расположенного на БКА.

2. Математическая модель движения КТС с распределенными параметрами

При записи уравнений движения КТС с растяжимым тросом используются следующая совокупность систем координат $OXYZ$, $Ox_oY_oZ_o$, $Cx_oY_oZ_o$, $Cx_iY_iZ_i$. Геоцентрическая правая система координат $OXYZ$ связана с плоскостью орбиты центра масс системы C , где ось OX направлена по линии узлов, ось OZ – по направлению вектора кинетического момента его орбитального движения. Геоцентрическая подвижная орбитальная система координат $Ox_oY_oZ_o$ вращается относительно системы координат $OXYZ$ с угловой скоростью $\dot{u} = du / dt$, где u – аргумент широты. Оси орбитальных подвижных систем координат $Ox_oY_oZ_o$ и $Cx_oY_oZ_o$ параллельны и отличаются только положением начал координат. Система координат $Cx_iY_iZ_i$ связана с линией, соединяющей концевые тела. Положение системы координат $Cx_iY_iZ_i$ относительно системы координат $Cx_oY_oZ_o$ определяется углами θ и β (рисунок 1).

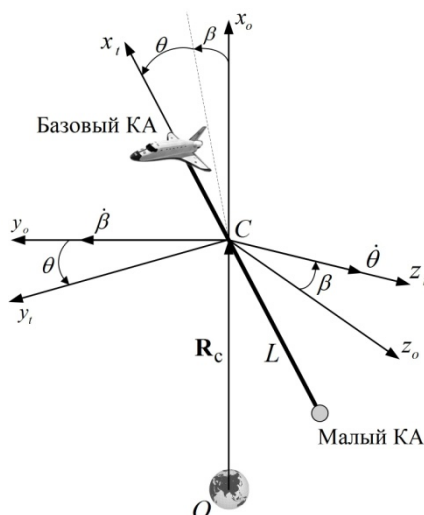


Рисунок 1. Взаимное положение систем координат $Cx_oY_oZ_o$ и $Cx_iY_iZ_i$.

Математическая модель движения КТС с распределенными параметрами представляет собой механическую систему, в которой она рассматривается как совокупность n материальных точек, соединенными упругими односторонними связями. В этом случае уравнения движения КТС записываются в виде [6]

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \mathbf{V}_k, \quad m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} = \mathbf{G}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1} \quad (1)$$

где \mathbf{r}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – радиус-вектора БКА ($k = 1$), материальных точек троса ($k = 2, 3, \dots, n - 1$) и МКА ($k = n$), $m_k = \frac{m_t}{n - 2}$ ($k = 2, 3, \dots, n - 1$) – масса материальной точки троса, m_t – суммарная

масса троса, n – количество точек, \mathbf{V}_k – абсолютные скорости, $\mathbf{G}_k = -K \frac{m_k \mathbf{r}_k}{r_k^3}$, K – гравитационный параметр Земли, \mathbf{R}_k – вектора аэродинамических сил, приложенные к k -ой точке. Причем на крайние точки действует только одна сила натяжения, то есть $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_n = 0$.

Силы натяжения \mathbf{T}_k между точками системы определяются по закону Гука с односторонними механическими связями

$$\mathbf{T}_k = T_k \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (2)$$

$$T_k = \begin{cases} c \frac{|r_{k+1} - r_k| - \Delta L_k}{\Delta L_k}, & \text{if } |r_k - r_{k+1}| - \Delta L_k \geq 0 \\ 0 & \text{if } |r_k - r_{k+1}| - \Delta L_k < 0 \end{cases} \quad (3)$$

где ΔL_k – нерастянутая длина k – ого участка троса, c – жесткость троса.

Особенностью математической модели (1) по сравнению с известными моделями [5, 6] является наличие аэродинамических сил, существенно влияющих на движение низкоорбитальных КТС. Аэродинамические силы, действующие на участки троса после его дискретизации, вычисляются из выражений [2]

$$R_{c,k} = -\frac{1}{2} c_i \rho D_i \Delta L_k V_{c,k} V_{c,k} |\sin(\alpha_k)|, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4)$$

где $V_{c,k}$ – скорость центра k – ого участка троса (цилиндра) относительно атмосферы, c_i – коэффициент аэродинамического сопротивления ($c_i = 2.2$), α_k – угол атаки k – ого цилиндра. Плотность атмосферы ρ соответствует ГОСТ 25645.101–83.

Скорость центра участка троса и его угол атаки определяются по формулам

$$V_{c,k} = \frac{V_{r,k} + V_{r,k+1}}{2}, \quad \cos \alpha_k = \frac{(r_{k+1} - r_k) \cdot V_{c,k}}{|r_{k+1} - r_k| V_{c,k}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (5)$$

где $V_{r,k}$ – скорости точек относительно атмосферы.

Тогда для точек троса и для концевых тел аэродинамические силы вычисляются следующим образом

$$R_k = \frac{(R_{c,k-1} + R_{c,k})}{2}, \quad (k = 2, 3, \dots, n-1) \quad (6)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} c_1 \rho_1 S_1 |V_{r,1}| V_{r,1} + \frac{R_{c,1}}{2}, \quad R_n = -\frac{1}{2} c_n \rho_n S_n |V_{r,n}| V_{r,n} + \frac{R_{c,n-1}}{2} \quad (7)$$

Абсолютные и относительные скорости концевых тел и материальных точек троса связаны следующим соотношением

$$V_{r,k} = V_k - \Omega_e \times r_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

где Ω_e – вектор угловой скорости вращения Земли.

В процессе движения развертывания КТС размерность системы (1) увеличивается, так как при увеличении длины троса постоянно необходимо добавлять новые материальные точки. Здесь используется алгоритм добавления новой точки, описанный в работе [4]. На участке стабилизации движения КТС в заданном диапазоне высот размерность системы (1) не изменяется и учитывается действие тяги от корректирующего двигателя, расположенного на базовом КА. Использование модели (1) позволяет анализировать форму троса и другие особенности движения КТС (растяжимость троса, возможность его провисания и т.д.) как распределенной системы на участках развертывания и стабилизации ее движения.

3. Участок развертывания КТС

Рассматривается развертывание КТС в положение, близкое к вертикальному. Предполагается, что выпуск троса сравнительно большой длины (несколько десятков километров) осуществляется с БКА с помощью механизма, работающего только на торможение.

Номинальная программа развертывания КТС в положение, близкое к вертикальному, строится исходя из обеспечения конечных условий движения системы при выпуске троса на заданную длину $L = L_{\text{end}}$ и имеет вид [5]

$$T_p = v_e \Omega^2 \cos^2 \theta_1 [a(L - L_{\text{end}}) + \frac{b\dot{L}}{\Omega} + 3L_{\text{end}}] + Q_L \quad (9)$$

где $v_e = (m_1^0 - L\rho_l)(m_n + L\rho_l / 2) / M$, a , b – параметры закона; $\Omega = \dot{\theta}$, θ_l – угол отклонения троса от вертикали в равновесном положении, определенный с учетом аэродинамических сил; m_1^0 и M – начальная масса БКА и масса всей системы; ρ_l – линейная плотность троса, Q_L – обобщенная сила, определенная с учетом аэродинамических сил для БКА, МКА и троса [5]. Причем составляющая силы Q_L , определяющая влияние троса, находится посредством интегрирования по длине прямолинейного нерастяжимого троса.

При моделировании разворачивания КТС к системе (1) необходимо добавить уравнения, учитывающие динамику работы механизма управления [4]

$$m_e \frac{dV_l}{dt} = T_1 - F_c, \quad \frac{dl}{dt} = V_l \tag{10}$$

где коэффициент m_e учитывает инерционность механизма управления (предполагается, что $m_e = \text{const}$), l – нерастянутая длина троса, сошедшего с механизма управления; V_l – скорость троса, $F_c = T_p + p_1(l - L) + p_2(V_l - \dot{L})$, p_1, p_2 – коэффициенты регулирования, T_p – номинальная сила натяжения троса (9), L, \dot{L} – номинальные значения. При вычислении F_c учитывается ограничение $F_c \geq F_{\min}$.

Номинальное движение КТС моделируется с помощью системы со сосредоточенными параметрами в орбитальной подвижной системе координат $Ox_oY_oZ_o$ [5]. При моделировании разворачивания КТС в соответствии с уравнениями (1) были приняты следующие исходные данные: высота начальной круговой орбиты $H = 270$ км, конечная длина троса $L_{\text{end}} = 30$ км, линейная плотность материала троса $\rho_l = 0.2$ кг/км, жесткость троса $c = 7070$ н, коэффициенты сил аэродинамического сопротивления БКА и МКА $c_k = 2.4$ ($k = 1, n$), относительная скорость отделения МКА по местной вертикали вниз 2 м/с, параметры закона управления (10) $a = 4$, $b = 5$, баллистические коэффициенты БКА и МКА $\sigma_1 = 3.016 \times 10^{-3}$ м²/кг, $\sigma_n = 0.015$ м²/кг, начальная масса БКА $m_1^0 = 2500$ кг. МКА представляет собой тело, близкое к сфере радиуса 1 м и массой 20 кг, минимальная управляющая сила в механизме выпуска троса $F_{\min} = 0.01$ н, коэффициенты обратной связи $p_1 = 0.243$, $p_2 = 7.824$ [4].

На рисунок 2, 3 показаны траектории МКА относительно БКА, где номинальные траектории показаны штриховыми линиями, а возмущенные траектории – сплошными линиями. Сравнение результатов моделирования движения КТС с учетом и без учета аэродинамических сил показало, что учет при построении номинальной программы (9) позволил уменьшить ошибки регулирования по окончанию разворачивания КТС с атмосферным зондом в 1.6 раз.

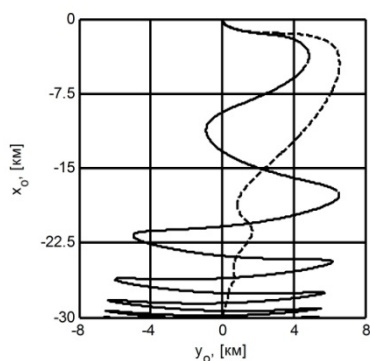


Рисунок 2. Номинальная (без учета аэродинамических сил) и возмущенная траектории разворачивания КТС.

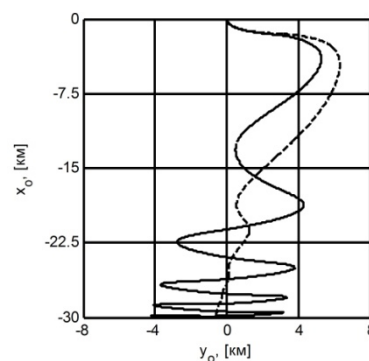


Рисунок 3. Номинальная (с учетом аэродинамических сил) и возмущенная траектории разворачивания КТС.

4. Свободное движение КТС

Свободное движение КТС по окончании ее разворачивания моделируется в соответствии с уравнениями (1). На рисунок 4 показано изменение формы троса в процессе свободного движения до входа КТС в плотные слои атмосферы (110 км). Под действием аэродинамических и гравитационных сил трос совершает маятниковые и изгибные колебания, при этом в данном случае максимальный прогиб троса составляет 0.8 км. Причем угол отклонения троса от вертикали увеличивается в процессе снижения высоты полета и достигает почти $\pi/2$ при входе в атмосферу (110 км).

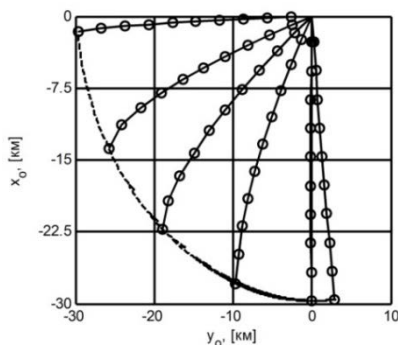


Рисунок 4. Форма троса в процессе свободного движения КТС.

5. Стабилизация движения КТС

В процессе свободного движения высота орбиты КТС уменьшается. Для обеспечения функционирования низкоорбитальной КТС в течение достаточно длительного времени предлагается по достижению заданной высоты полета для стабилизации орбитальных параметров использовать корректирующий реактивный двигатель, расположенный на БКА. В качестве примера использовался корректирующий двигатель ЖРДМТ 11Д428АФ-16 [7]. Периодическое включение двигателя, тяга которого направлена противоположно скорости БКА относительно атмосферы, позволяет поддерживать высоты полета БКА (сплошная линия) и МКА (штриховая линия) в заданном диапазоне (рисунок 5, где $\tau = t / t_p$ - безразмерное время, t_p - период движения системы по начальной круговой орбите). На участках свободного движения и стабилизации высоты полета КТС эксцентриситет орбиты слабо изменяется и близок к нулю. Параметры двигателя: тяга и удельный импульс $F_{д\max} = 157$ н и $I = 3002$ м/с. Диапазон высот стабилизации был выбран исходя из ограничения на угол отклонения троса от вертикали 30° .

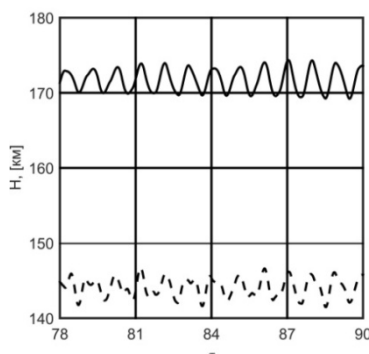


Рисунок 4. Высоты орбиты БКА и МКА.

6. Выводы

1. Учет аэродинамических сил при построении номинальной программы разворачивания низкоорбитальной КТС позволяет существенно уменьшить ошибки регулирования и размах возникающих колебаний системы относительно вертикали.

2. Использование корректирующего двигателя на БКА, тяга которого направлена противоположно относительной скорости его движения, позволяет обеспечить стабилизацию полета КТС в заданном диапазоне высот.

7. Благодарности

Работа выполнена при поддержке CSC (China Scholarship Council), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Проект № 3102017JC06002), Shaanxi science and technology program (Проект № 2017KW-ZD-04).

8. Литература

- [1] Cosmo, M.L. Tethers in Space Handbook, 3rd Ed / M.L. Cosmo, E.C. Lorenzini. – Huntsville: NASA Marshall Space Flight Center, 1997. – 241 p.
- [2] Белецкий, В.В. Динамика космических тросовых систем / В.В. Белецкий, Е.М. Левин. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
- [3] Kumar, K.D. Review of Dynamics and Control of Nonelectrodynamic Tethered Satellite Systems / K.D. Kumar // J. of Spacecraft and Rockets. – 2006. – Vol. 43(4). – P. 705-720.
- [4] Zabolotnov, Y.M. Control of the deployment of a tethered orbital system with a small load into a vertical position / Y.M. Zabolotnov // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 79(1). – P. 28-34.
- [5] Дон, Ч. Анализ динамики развёртываемой космической тросовой системы с атмосферным зондом / Ч. Дон, Ю.М. Заболотнов, Ч. Ван // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 4(4). – С. 726-732.
- [6] Zabolotnov, Y.M. Introduction to Dynamics and Control in Space Tether System / Y.M. Zabolotnov. – Beijing: Science Press, 2013. – 140 p.
- [7] Егорычев, В.С. Жидкостные ракетные двигатели малой тяги и их характеристики / В. С. Егорычев, А.В. Сулинов. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 99 с.

Mathematical modeling and analysis of motion of low-orbital space tether system

Z. Dong¹, Y.M. Zabolotnov¹, C. Wang²

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

²Northwestern Polytechnical University, West Youyi Road 127, Xi'an, P.R. China, 710072

Abstract. The paper analyzes the motion of a low-orbital space tether system (STS), which consists of a main spacecraft and a sub-satellite connected by a tether. The deployment stage, the free motion stage and the stabilization stage on a low and nearly circular orbit are considered. The final tether length is several tens kilometers. The stabilization motion of the system in a given range of orbital height is carried out with the help of a corrective thruster. The corrective thruster is located on the main spacecraft. The simulation for all motion stages of the system is based on a mathematical model with distributed parameters, in which the tether is considered as a series of material points with elastic unidirectional mechanical connection.

Keywords: low-orbital space tether system, deployment, free motion, stabilization motion, corrective thruster.