

# Локальная аппроксимация дискретных процессов интерполяционными многочленами

А.А. Колпаков<sup>1</sup>, Ю.А. Кропотов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Муромский институт (филиал) ВлГУ, Орловская 23, Муром, Владимирская область, Россия, 602264

**Аннотация.** Организация вычислений или обработка данных по наблюдаемым выборкам процесса осуществляемая с помощью представления алгебраическими многочленами, относится к классу методов аналитического представления и обработки сигналов. В настоящей работе рассматриваются структура устройств и определяющие их формулы, используемые при локальной аппроксимации с помощью степенных алгебраических многочленов, когда наблюдаемые данные известны точно.

## 1. Введение

Организация вычислений или обработка данных по наблюдаемым выборкам процесса осуществляемая с помощью представления алгебраическими многочленами, относится к классу методов аналитического представления и обработки сигналов. В настоящей работе рассматриваются структура устройств и определяющие их формулы, используемые при локальной аппроксимации с помощью степенных алгебраических многочленов, когда наблюдаемые данные известны точно.

## 2. Многоканальная система обработки дискретных последовательностей

Представление функций наблюдаемых данных можно отнести к вопросам интерполяции с помощью многочленов по линейно независимым системам функций и рассматриваются в последующем как вопросы согласования локальных интерполяционных функций по гладкости в узлах их сопряжения [2, с. 146-194].

Аппроксимация процессов по наблюдаемым выборкам возможно осуществить с помощью алгебраических многочленов, например, точечного МНК или методами локальной интерполяции, которые относятся к классу методов аналитического представления сигналов. Здесь рассматриваются алгебраические модели и методы необходимости решения локальной удовлетворенности условиям гладкого сопряжения, аппроксимации по дискретным данным.

Таким образом, вначале полагается, что все выборочные значения процесса и его производных в узлах интерполяции и сопряжения известны.

Обозначим через  $P_i(t)$  интерполяционный многочлен, обеспечивающий приближение процесса  $y(t)$  на интервале  $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1})$ ,  $\bar{t}_i < \bar{t}_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , по некоторому числу известных значений этого процесса  $y(t_{ij}) = y_{ij}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , и, возможно, его производных  $y^{(r)}(t_{ij}) = y_{ij}^{(r)}$ ,  $r = 0, 1, \dots, m_j$  и  $y_{ij}^{(0)} \equiv y_{ij}$ .

Моменты  $\bar{t}_i$  сопряжения многочленов  $P_{i-1}(t)$  и  $P_i(t)$  будут называться точками или узлами сопряжения, а моменты  $t_{ij}$ , в которые берутся выборочные значения  $y_{ij}$  и  $y_{ij}^{(r)}$ , – узлами интерполяции. Интервалы  $[\bar{t}_{i-1}, \bar{t}_i]$  и  $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$ , называемые интервалами интерполяции, являются, очевидно, областями определения многочленов  $P_{i-1}(t)$  и  $P_i(t)$ . Границы интервалов, в пределах которых находятся узлы интерполяции  $t_{ij}$ , обозначаются как моменты  $\bar{\bar{t}}_i$  и  $\bar{\bar{t}}_{i+1}$ , так что интервал  $[\bar{\bar{t}}_i, \bar{\bar{t}}_{i+1}]$  является областью определения наблюдаемых данных, используемых при построении интерполяционной формулы или отображения  $P_i(t) : [\bar{\bar{t}}_i, \bar{\bar{t}}_{i+1}] \rightarrow [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$ .

Интерполяционный многочлен  $P_i(t)$  по системе алгебраических функций  $t^k, k = 0, 1, \dots, N$ , то есть многочлен  $P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 \dots + a_{iN}t^N$ , можно записать в виде

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^{m_j} L_{ij}^r(t) y_{ij}^{(r)}, \tag{1}$$

где  $L_{ij}^0(t) \equiv L_{ij}(t)$  и  $L_{ij}^r(t)$  – многочлены, удовлетворяющие в узлах интерполяции  $t_{ij}$  условиям

$$L_{ij}(t) \Big|_{t=t_{ik}} = \delta_{jk}, \quad \frac{d^l}{dt^l} L_{ij}^r(t) \Big|_{t=t_{ik}} = \delta_{jk} \delta_{lr}, \quad l = 0, 1, \dots, m_j, \tag{2}$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера.

Следует учесть, что система функций  $t^k$  относится к классу обобщенных чебышевских систем, которые по определению должны иметь отличный от нуля определитель

$$U^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & N \\ t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ t_0 & 1 & \dots & 0 & \dots & t_n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_0^N & t_0^{N-1} & \dots & t_0^{N-m_0} & \dots & t_n^N & \dots & t_n^{N-m_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

В этом случае можно сделать вывод о существовании интерполяционного многочлена при любом расположении узлов интерполяции и, в частности, о существовании фундаментальных многочленов  $L_{ij}^r(t)$ , а отсюда о возможности аппроксимации наблюдаемых данных с помощью выражения (1).

Существенный момент данного вывода заключается в том, что в каждом узле интерполяции должны быть известными значения, как самого процесса, так и всех его производных – до заданного максимального порядка. Однако если по физическим особенностям задачи в качестве исходных данных при построении интерполяционного многочлена выступают выборочные значения процесса и его производных, измеренные в различные моменты времени, и интерполяционный многочлен вместо (1) задается выражением

$$P_i(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{r \in M_j} L_{ij}^r(t) y_{ij}^{(r)}, \tag{4}$$

где  $M_j$  - подмножество множества целых чисел  $(0, 1, \dots, m_j)$  и фундаментальные многочлены удовлетворяют условиям

$$\frac{d^l}{dt^l} L_{ij}^r(t) \Big|_{t=t_{ik}} = \delta_{jk} \delta_{lr}, \quad l, r \in M_j, \tag{5}$$

то можно показать, что задача построения многочленов (4) и (5) при некоторых комбинациях узлов интерполяции может и не иметь решения. Это можно показать на простом примере построения многочлена второй степени  $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  по заданным в узлах

интерполяции значениям  $P(t_0) = y_0$ ,  $P(t_1) = y_1$ ,  $P(t_2) = y_2$ . Коэффициенты этого многочлена с учетом приведенных условий должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 0 & 1 & 2t_1 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Детерминант этой системы равен  $(t_2 - t_0)(t_2 + t_0 - 2t_1)$ . В случае равноотстоящих узлов, когда  $t_2 + t_0 = 2t_1$ , он равен нулю. При этом решение системы и соответственно решение задачи интерполяции не существует, если не считать маловероятного случая многозначного решения, когда ранги основной и расширенной матриц совпадают.

Подобная ситуация, хотя и не обязательно, но может возникнуть и в общем случае. Поэтому при возникновении потребности в использовании формул типа (4), (5) выбранная схема интерполяции должна быть проверена на существование решения задачи построения интерполяционного многочлена. Кроме выполнения этого условия на применение этих формул не налагается никаких других ограничений.

Используя формулу (1), аппроксимацию  $\hat{y}(t)$  процесса  $y(t)$  на всей временной оси можно записать в виде

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) I_i(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^{m_j} \sum_{i=0}^{\infty} I_i(t) L_{ij}^r(t) y_{ij}^{(r)}. \tag{7}$$

Выборочные значения  $y_{ij}$  и  $y_{ij}^{(r)}$ , однозначно определяющие интерполяционные и фундаментальные многочлены (1; 4), можно разделить на два класса: действительные, полученные в результате измерения, значения процесса  $y(t)$  и его производных  $y^{(r)}(t)$  в узлах интерполяции  $t_{ij}$ , и значения, представляющие собой их оценку по косвенным данным. Такую оценку можно, например, получить, вычислив значения многочлена  $P_{i-1}(t)$ , представляющего процесс на предшествующем шаге интерполяции, и значения его производных  $P_{i-1}^{(r)}(t)$  в требуемых узлах интерполяции. На схемах интерполяции подобные значения будут в последующем выделяться знаком звездочки, чтобы их можно было отличить от измеренных значений.

Для обеспечения требуемой гладкости интерполяционной формулы (7) в узлах сопряжения интервалов  $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1})$ , узлы  $\bar{t}_i$ , очевидно, должны быть введены в состав множества узлов интерполяции  $t_{ij}$  при данном значении индекса  $i$ , если они уже не входят в их число по определению. При этом узлы  $\bar{t}_{i+1}$  принадлежать этому множеству не обязаны.

При рассмотрении случая, когда схема расположения узлов интерполяции и длина отрезков  $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1})$  не зависят от номера  $i$  шага интерполяции, то есть, когда

$$\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i = \Theta \text{ и } t_{ij} = t_j + i\Theta, \tag{8}$$

и если ввести дискретное время  $t = \tau + k\Theta$ , то интерполяционную формулу (7) можно записать в виде

$$\hat{y}(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^{m_j} I(t - k\Theta) L_j^r(t - k\Theta) y_{kj}^{(r)}, \tag{9}$$

где  $L_j^r(\tau) \equiv L_{0j}^r(\tau)$  – фундаментальные многочлены, определенные на интервале  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ ,  $L_j^0(\tau) \equiv L_j(\tau)$  и временное окно  $I(t - k\Theta) \equiv I_k(t)$ . В дальнейшем для определенности полагается также, что  $\bar{t}_0 \equiv t_{0q} = 0$ .

Интерполяция процессов в многомерном пространстве, представленном дискретной функцией, производится аналогичным образом, если формула (9) применяется по отдельности к каждому компоненту вектора. При интерполяции траекторий или границ объектов в многомерном пространстве встает вопрос о выборе наиболее естественной системы координат, в которой рассматриваемая кривая принимает более гладкую форму или описывается более простыми уравнениями.

Из приведенных исследований, а также согласно работе [8] видно, что применение точечного МНК полностью оправдано, т.к. данный метод позволяет получить наименьшее число коэффициентов, по сравнению с другими методами интерполяции, такими, как сплайн-функции, интерполяционный многочлен Лагранжа и т.д., при том же значении погрешности.

### 3. Исследование ускорения вычислений в системе из специализированных вычислительных модулей

Выражению (9) соответствует функция модели многоканальной системы обработки дискретных последовательностей данных, которая имеет вид

$$\hat{y}(t) = \sum_{l=1}^l F_l^r y(t) \Phi_0 = \sum_{l=1}^l F_l^r y_{kl} , \tag{10}$$

где  $l$  – число специализированных вычислителей с функцией формирователя процесса  $F_l^r$ . Структурная схема, реализующая модель многоканальной системы обработки дискретных последовательностей данных, приведена на рисунке 1.

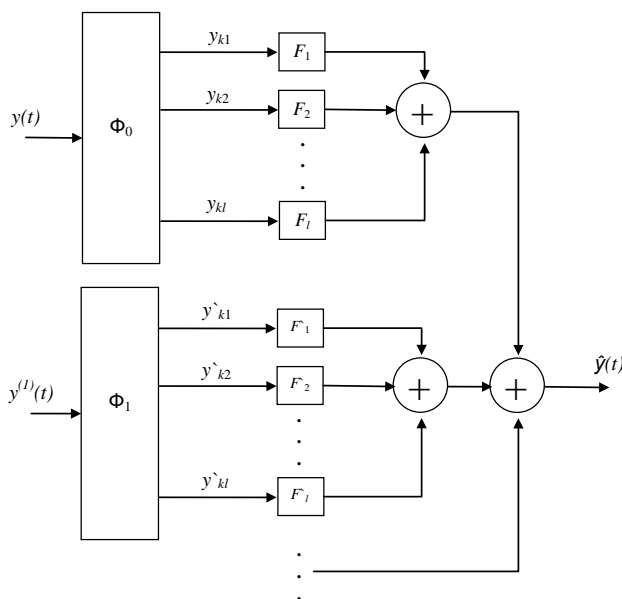


Рисунок 1. Модель многоканальной системы обработки данных.

Как видно из рис. 1 и в соответствии с (10) каждый канал системы обработки данных характеризуется функцией формирователя процесса  $F_l$ . При этом в качестве входных воздействий в этих каналах является входная информация в виде последовательности  $y_{kl}^{(r)}$  на конечном интервале из  $N$  отсчетов, получающаяся в результате формирования выборок процесса устройствами коммутации  $\Phi_0, \Phi_1, \dots$ . Учитывая, что указанные последовательности определяются выражением

$$y_{kl}^{(r)} = y^{(r)}(t_k + \Theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \tag{11}$$

где  $r \in \{0,1,2\}$ , то в случае равноотстоящих узлов интерполяции, образующих периодическую последовательность отсчетных точек с периодом  $T$  и с учетом  $\Theta = dT$ , выражение (11) принимает вид

$$y_{kj}^{(r)} = y^{(r)}((j + dk)T), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

где  $d$  – прореживание,  $d \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ ,  $j$  – смещение последовательности,  $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ .

Равноотстоящую последовательность можно представить в зависимости от смещения  $j$  в виде

$$y_{kj}^{(r)} = \begin{cases} y^{(r)}[d(k - j)T], & j < k, \\ y^{(r)}[dkT], & j = k, \\ y^{(r)}[d(k + j)T], & j > k. \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (13)$$

В практическом плане выражения (12) и (13) характеризуют ситуации, когда узлы сопряжения соответственно совпадают с отсчетными точками процесса  $y(t)$  и его производных.

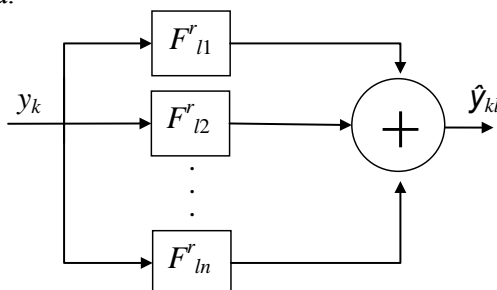
Также следует отметить, что  $l$ -тый канал модели многоканальной системы обработки данных с функцией формирователя  $F_l$  представляет собой набор фильтров  $F_{li}^r(S)$  в виде

$$F_l = \sum_{i=1}^n F_{li}(S),$$

которые образуют структурную схему, представленную на рис. 2. с передаточной функцией в виде

$$F_{li}^r(S) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_{li}} (a_{jil}^r - c_{jil}^r e^{-S\Theta}), \quad (14)$$

где  $c$  – коэффициенты ряда.



**Рисунок 2.** Структурная схема блока фильтров.

После преобразований выражения (14) относительно  $S_i$  с учетом ограничений типа равенств

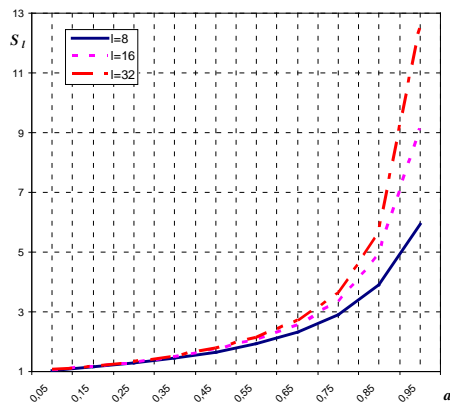
$$r = 0, d = 1, j = 0, c = 0, \quad (15)$$

решение определения ускорения вычислительных операций в зависимости от числа специализированных вычислителей и от коэффициента объема параллельных вычислений  $a$  осуществляется по формуле

$$S_i = \frac{l}{l(1 - a) + a}. \quad (16)$$

Из выражения (16) видно, что прирост эффективности вычислений зависит от алгоритма задачи при ограничении вида  $a < 1$ , что позволяет оценить эффективность распараллеливания алгоритма и вывод о необходимом количестве специализированных вычислителей [1, 5].

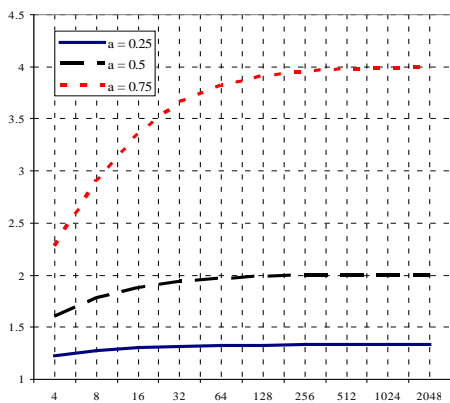
Зависимость роста ускорения вычислительных операций на разном количестве специализированных вычислителей от коэффициента объема распараллеленных вычислений  $a$  показано на рисунке 3.



**Рисунок 3.** Зависимость ускорения вычислений в системе из  $l$  специализированных вычислителей от значения  $a$ .

Из рисунка 3 видно, что увеличение ускорения вычислений для вычислительной системы из  $l$  специализированных вычислителей можно получить при значении параметра  $a$  в соответствии с условием  $0.25 \leq a \leq 0.75$ .

Результаты исследований зависимости ускорения вычислений от числа специализированных вычислителей  $l$  представлены на рисунке 4.



**Рисунок 4.** Зависимость ускорения вычислений в системе из специализированных вычислителей от значения числа  $l$ .

Из рисунка 4 видно, что при значении коэффициента  $a = 0.75$  в алгоритме, увеличение числа распараллеленных ядер специализированных вычислителей до значения  $l \geq 16$  приводит к существенному росту производительности, в частности применение одного четырехъядерного графического процессора в качестве специализированного вычислителя увеличивает производительность более, чем в 2 раза.

Разработанная модель многоканальной системы обработки данных была применена для исследования и разработки алгоритма расширенного микширования аудиопотоков в системах телекоммуникации [10]. Применение разработанного алгоритма в гетерогенной компьютерной системе уменьшает время на обработку данных до  $0,2226 \times 10^{-3}$  с вместо  $1,351 \times 10^{-3}$  с – временем обработки данных базовым алгоритмом.

**4. Выводы**

Исследования показали, что производительность вычислительной компьютерной системы с использованием специализированных вычислителей повышается и зависит от доли распараллеленных задач в алгоритме и от количества специализированных вычислителей, что согласуется с основными положениями исследований Амдала и Грэма.

## 5. Литература

- [1] Бахвалов Н.С. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 1: Вычислительная математика / Н.С. Бахвалов, В.В. Воеводин. – М.: Наука, 2005. – 342 с.
- [2] Кульбак, С. Теория информации и статистика. – М.: Наука, 1967. – 408 с.
- [3] Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
- [4] Brillinger, D.R. A study of second- and third-order spectral procedures and maximum likelihood in the identification of bilinear systems //IEEE Trans. on Acoustics, Speech and signal processing. – 1990. – Vol. 38(7). – P. 1238-1245.
- [5] Пупков, К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
- [6] Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
- [7] Helman, D.R. Designing Practical Efficient Algorithms for Symmetric Multiprocessors / D.R. Helman, J. JaJa // Lecture Notes in Computer Science, International Workshop ALENEX. – 1999. – Vol. 1619. – P. 37-56.
- [8] Формалев, В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
- [9] Kropotov, Y.A. Algorithms for processing acoustic signals in telecommunication systems by local parametric methods of analysis / Y.A. Kropotov, V.A. Ermolaev // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), 2015 [Electronic resource]. – Access mode: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7147109/>.
- [10] Kolpakov, A.A. Advanced mixing audio streams for heterogeneous computer systems in telecommunications / A.A. Kolpakov, Y.A. Kropotov //CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1902. – P. 32-36.

## Local approximation of discrete processes by interpolation polynomials

A.A. Kolpakov<sup>1</sup>, Yu.A. Kropotov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs, Orlovskaya street 23, Murom, Vladimir Region, Russia, 602264

**Abstract.** The organization of computations or the processing of data on observable process samples, carried out using the representation of algebraic polynomials, belongs to the class of methods of analytical representation and signal processing. In this paper, we consider the structure of devices and the formulas that define them, used in local approximation using power algebraic polynomials, when the observed data are known exactly.