Локализация оптимального фокуса центральной симметрии, основанной на мере Жаккара, для бинарных фигур

Н. А. Ломов
Тульский государственный университет
Тула, Россия
nikita-lomov@mail.ru

О. С. Середин
Тульский государственный университет
Тула, Россия
oseredin@yandex.ru

Д. В. Ляхов
Тульский государственный университет
Тула, Россия
liakhov.daniil@mail.ru

***Аннотация*—В работе предложена аналитически обоснованная оценка размера области бинарной растровой фигуры, в которой гарантированно содержится фокус вращательной симметрии, основанной на мере Жаккара. Выполнена численная реализация предложенного метода и проведены эксперименты на изображениях.**

Ключевые слова— вращательная симметрия, фокус симметрии, мера Жаккара

1. Введение

При решении задач нахождения точного положения фокуса вращательной квази-симметрии, основанной на мере Жаккара для бинарных растровых изображений, предполагается, что проверка найденных эффективных решений может быть проведена с использованием базовой экстенсивной процедура полного перебора по всем точкам из некоторой окрестности интереса. При этом для каждой точки строится график (профиль, см рис. 1, 2) меры Жаккара в зависимости от угла $J(\varphi)$ [1]. Анализ таких профилей в разных точках изображения позволяет судить об положении фокуса вращательной симметрии и её степени.

В работе [1] размер окрестности поиска задавался эмпирически. В частности, в качестве элементов окрестности рассматривались точки, ограниченные окружностью с радиусом r и центром, совпадающим с центром масс бинарного растрового изображения. Размер окрестности определялся как $r=\lambda R$, где R – радиус окружности, описанной вокруг фигуры или расстояние от центра масс до наиболее удаленной точки фигуры, $\lambda \in (0..1]$ – параметр, задающий размер области поиска (Рис. 2). В экспериментах значения этого параметра выбирались равными 0,1 или 0,15 без теоретического обоснования. Очевидно, что чем больше параметр λ, тем большее число точек необходимо проверить.

В этой работе мы показываем, что размер окрестности гарантировано содержащей фокус вращательной симметрии, может быть получен аналитически.

2. Определение окрестности

Идея поиска окрестности, локализующей оптимальный фокус вращательной симметрии, основанной на мере Жаккара, относительно некоторой точки опирается на аналитическую оценку этой меры сверху за счет использования простой формы. Пусть фигура A вложена в фигуру C, тогда после поворота A' будет вложена в C', а значит площадь пересечения

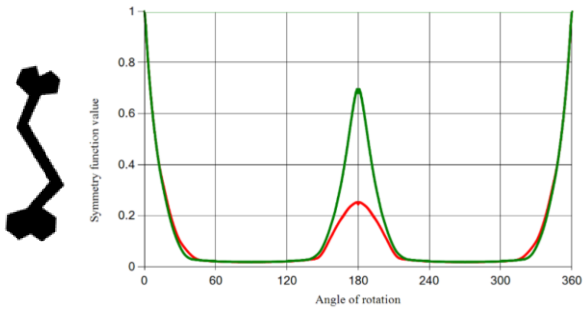


Рис. 1. Значения меры Жаккара при вращении фигуры вокруг центра масс (красная кривая) и вокруг фокуса вращательной симметрии (зеленая кривая)

A и A' ограничена сверху площадью пересечения C и C'. Наиболее простой описывающей формой является описывающая окружность. Тогда $|C \cap C'|$ зависит только от расстояния от центра круга до точки поворота и может быть рассчитана аналитически как площадь линзы, образованной пересечением двух окружностей.

Пусть для фигуры задана некоторая окружность с центром, совпадающим с центром масс точек $\mathbf{p}_i, i=1,\dots,N$ фигуры $\mathbf{q}=E\{\mathbf{p}\}$ с радиусом r, количество пикселей фигуры, лежащих за пределами этой окружности равно $n<N$. Тогда размер (радиус) окружности, гарантированно содержащей фокус центральной симметрии, не будет превосходить

$$d \le \min_r \left(r \cdot L^{-1}\left(\frac{I_0 - n(r)}{S(r)} \right) \right), \qquad (1)$$

где I_0 – площадь пересечения фигуры при повороте на 180 градусов вокруг центра масс, $n(r)$ – количество пикселей изображения за окружностью радиуса r с центром в точке центра масс, L^{-1} – расстояние между центрами окружностей с радиусами r и нормированной площадью пересечения окружностей (линзы) $I_0 - n(r)$, $S(r)=\pi r^2$ – площадь окружности с радиусом r.

Нормированный к площади окружности размер линзы пересечения двух окружностей у которых совпадают величины радиусов $L(r,h)$ будет определяться как

$$L(r,h)=\begin{cases}\dfrac{J}{2\pi r^2-J}, & h\le 2r,\\ 0, & h>2r,\end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha = arc\cos\left(h/2r\right)$, $J=r^2(2\alpha-\sin(2\alpha))$.

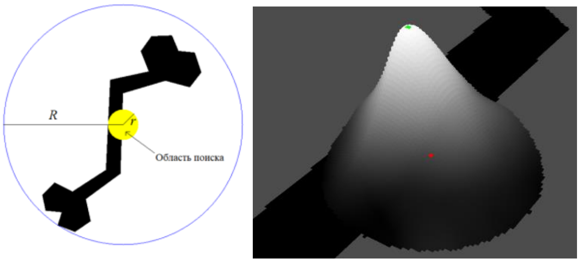


Рис. 2. Область поиска фокуса центральной симметрии вокруг центра масс, $r=\lambda R$, $\lambda=0{,}15$, справа показаны значения функции центральной квази-симметрии в центре масс (красная точка), и точке, обеспечивающей максимум центральной симметрии (зеленая точка)

Если нормировать значение радиуса r к единице, и соответствующим образом корректировать h, как долю от единичного радиуса, то выражение упрощается и зависит только от одного аргумента:

$$\alpha = arc\cos\left(h/2\right),\ J=2\alpha-\sin(2\alpha),$$

$$L(1,h)=\frac{J}{2\pi-J},\ h\in[0..2]. \qquad (3)$$

Вычислить аналитически обратную к $L(r,h)$ функцию L^{-1} представляется затруднительным, поэтому предлагается использовать табулированный набор значений или для нормированного к единице и фиксированного значения r приближенную функцию $\tilde{L}^{-1}(S)=2.0266-1.0264S-0.9969\sqrt{S}$, относительная ошибка приближения не превосходит 1,25%.

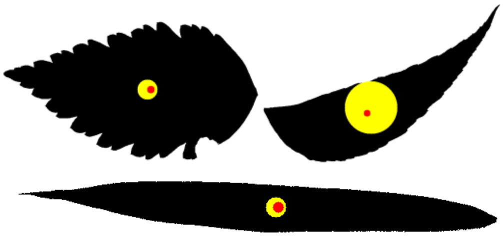


Рис. 3. Результаты определения области, гарантированно содержащей фокус центральной симметрии

На рис. 3. продемонстрирована визуализация размера рассчитанной по (1) области, гарантированно содержащей фокус вращательной симметрии; Область показана желтым цветом, положение истинного фокуса центральной симметрии отмечено красным маркером.

Если рассматривать вытянутые фигуры, становится очевидным, что для них можно в качестве искомой области рассматривать не окружность, а эллипс. Такое обобщение несложно провести, если использовать расстояние Махаланобиса для корректировки расстояния от точки центра масс с последующим сравнением с радиусом описывающей фигуру окружности. В выражении (1) корректируется величина r с учетом следующего замечания: $D_M(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$, где $\mathbf{C}=E\left\{(\mathbf{p}-\mathbf{q})(\mathbf{p}-\mathbf{q})^T\right\}$ матрица ковариаций, построенная для векторов X и Y, составленных из соответствующих координат пикселей фигуры. Заметим, что в выражении (1) расстояние для некоторой точки $\mathbf{p}$ от центра масс $\mathbf{q}$ понималась как $D_E(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^T(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$. Следует отметить, что в этом случае необходимо вместо площади окружности в выражении (1) использовать площадь эллипса, рассчитанную через соответствующее значение радиуса в метрике Махаланобиса $S(r_M)=\sqrt{\det\mathbf{C}}\pi r_M^2$.

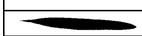
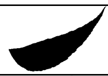
Формула аналитического расчета площади пересечения $L(r_M,h_M)$ для пары эллипсов, у которых совпадают направления главных осей, в точности совпадает со значениями для обычных окружностей (3).

На рис. 4 показаны результаты определения области, гарантированно содержащей фокус центральной симметрии, описанной эллипсом. Всего в наших экспериментах было обработано более ста изображений из различных баз. Во всех случаях истинное положение фокуса вращательной симметрии оказывалось внутри рассчитанной области.

Рис. 4. Результаты определения области, гарантированно содержащей фокус центральной симметрии в виде эллипса

Эффективность процедуры можно оценить как сокращение потенциального числа пикселей, необходимых для просмотра (Табл. 1).

Таблица I. Сравнительные результаты

Изображение	**Площ. эллипса**	**Площадь окружности**	**Площадь описанной окружности**		**Площадь фигуры**
			λ = 1.0	λ = 0.1	
	68	554	272638	3409	26831
	9352	19990	406717	7525	103549
	1756	2442	332637	4777	159809

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00575.

Литература

[1] Seredin, O. Jaccard Index-Based Detection of Order 2 Rotational Quasi-Symmetry Focus for Binary Images / O. Seredin, D. Liakhov, O. Kushnir, N. Lomov // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2022. – Vol.32(3). – P. 672-681.