Кривизна в задачах построения гладких инвариантных многообразий динамических систем

М.О. Балабаев[1]

[1]Самарская государственная областная академия (Наяновой), Молодогвардейская 196, Самара, Россия, 443001

Аннотация. В рамках данной статьи рассматривается метод кривизны потока применительно к построению инвариантных многообразий автономных динамических систем. В работе рассмотрены модели трехмерного автокаталатора и самосопряженная модель ФитцХью-Нагумо. Показано существование для них достаточно гладких инвариантных многообразий с переменной устойчивостью.

Множество задач, имеющих важное прикладное значение, описываются автономными динамическими системами с сингулярными возмущениями вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(f, y, \mu), \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon} g(x, y, \mu), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ — медленная и быстрая переменные соответственно, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малое возмущение, а μ — скалярный параметр.

Инвариантные многообразия таких систем достаточно часто конструируются в виде разложений по степеням малого параметра:

$$x = x_0(y, \mu) + x_1(y, \mu)\varepsilon + x_2(y, \mu)\varepsilon^2 + \dots,$$

так что их теоретически можно вычислить с любой необходимой степенью точности.

Подобные разложения далеко не всегда имеет требуемую степень гладкости, что накладывает определенные ограничения на их применение. Более того, если цель состоит в моделировании критического режима, то гладкость интегрального многообразия становится необходимым условием. В таких ситуациях требуется некоторым образом «подклеить» инвариантное многообразие в тех точках, где оно распадается на устойчивые и неустойчивые листы за счет пересечения с множеством нерегулярных точек.

Рассмотрим достаточно общий метод кривизны потока применительно к построению инвариантных многообразий автономных динамических систем, описанным ранее в [1, 2, 10] с их последующим склеиванием в соответствии с [1, 11]. В отличие от других методов, метод кривизны потока позволяет непосредственно выписать асимптотическое разложение инвариантного многообразия автономной системы, причем точность ограничивается лишь доступными вычислительными ресурсами.

Перепишем исходную систему в виде

$$\dot{P} = V(P),$$

где P — вектор-столбец неизвестных $\{x, y\}$, а V — вектор-столбец правых частей системы. Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $\varphi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ вида

$$\varphi(P) = \left| V \wedge \dot{V} \wedge \ddot{V} \wedge \cdots \wedge \overset{(n+m-1)}{V} \right|,$$

где символом $\wedge$ обозначено внешнее произведение.

Соответствующее многообразие $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ называется *кривизной потока системы*, если $\varphi(P) = 0$ для всех $P \in \Omega$[1, 2, 8].

Ж.Г. Дарбу в работе [3] показал, что данное многообразие является инвариантной поверхностью исходной динамической системы. С учетом того, что производная Ли вырождается $L_{\mathrm{P}}\varphi = 0$, очевидно что φ является первым интегралом системы [4]. Таким образом, $\varphi(P)$ является глобальным инвариантом и значит $d\varphi = 0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial P_1}\, dp_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial P_2}\, dp_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial P_{n+m}}\, dp_{n+m} + \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\, d\varepsilon \equiv 0.$$

Легко показать [1, 8, 10, 11], что уравнение выше позволяет в некоторых случаях получить явные формулы для коэффициентов разложения интегрального многообразия исходной системы. Более того, поскольку эти коэффициенты зависят от скалярного параметра μ представляется возможным дополнительно осуществить «склейку» полученного инвариантного многообразия.

Рассмотрим модель трехмерного автокаталатора в соответствии с [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu\left(\dfrac{5}{2} + y\right) - xz^2 - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(xz^2 + x - z\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ это малый параметр, $0 \leq \mu < 1$ и $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

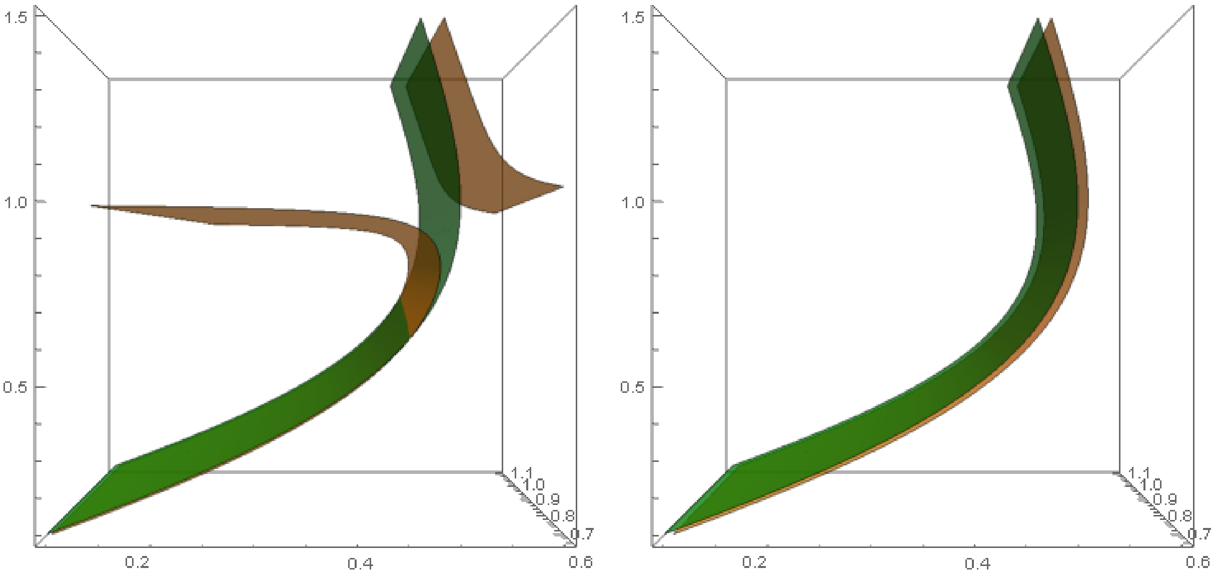
Как было показано в [1], инвариантное многообразие системы (1) имеет вид:

$$x(y, z, \mu, \varepsilon) = \frac{z}{1 + z^2} + \frac{\left(z^2 + 1\right)\left(-5\mu - 2\mu y + 2z\right)}{2\left(z^2 - 1\right)}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{2}$$

и является разрывным, что не позволяет рассматривать его в качестве отправной точки для формирования стабильного критического режима.

Подходящим выбором конкретного значения μ можно устранить разрыв в некоторой точке (рисунок 1а). Однако в этом случае лишь единственная появившаяся траектория-утка будет моделировать критический режим, что не является достаточным для стабильного протекания автокаталитической реакции в условиях незначительных естественных колебаний начальных условий.

Если же рассмотреть параметр μ в качестве управляющей функции, то становится возможным «подклеить» листы инвариантного многообразия одновременно во всех точках (рисунок 1б). В этом случае, при незначительных колебаниях начальных условий новая траектория будет по-прежнему моделировать критический режим и реакция будет стабилизирована.



а) б)

Рисунок 1. Медленная поверхность модели трехмерного автокаталатора (зеленая) и интегральное многообразие первого порядка точности (желтое) а) при $\varepsilon = 0.01$, $\mu = 0.2$; б) при использовании склеивающей функции.

Примером такой управляющей функции для системы (1) может являться найденная в [1] склеивающая функция

$$\mu = \frac{2}{2y+5} + \frac{6}{2y+5}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right),$$

при подстановке которой инвариантной многообразие (2) становится непрерывным:

$$x = \frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2+1}{z+1}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right).$$

В качестве другого примера рассмотрим самосопряженную модель ФитцХью-Нагумо, в соответствии с [5, 6]:

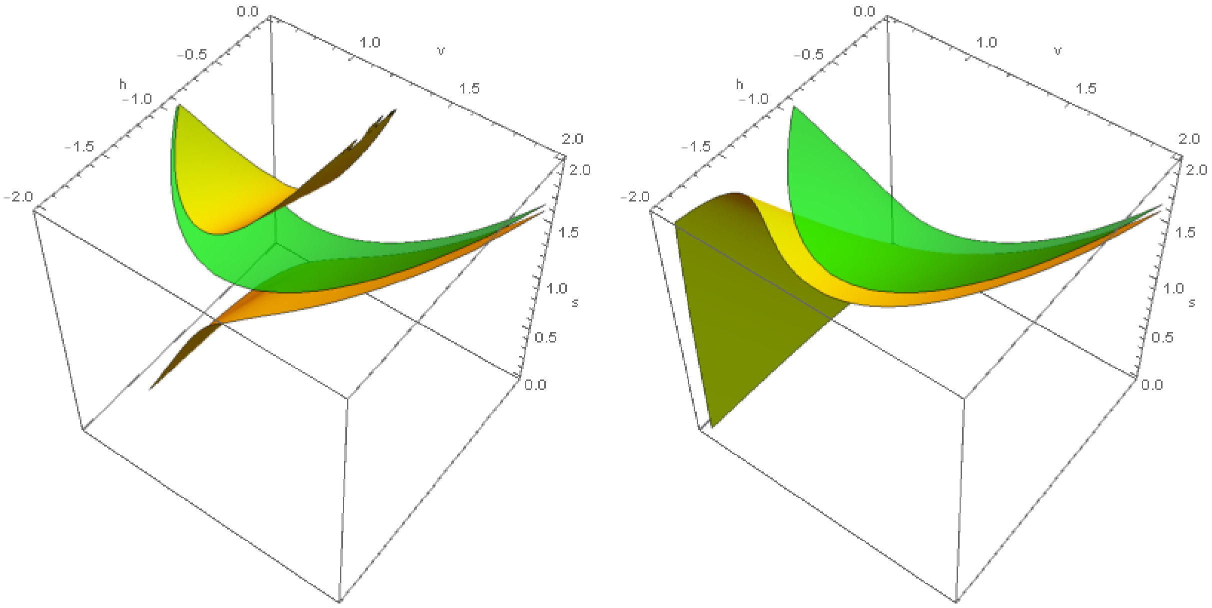
$$\begin{cases} \dot{v} = h - \dfrac{v^3 - v + 1}{2} - \gamma s v, \\ \dot{h} = -\varepsilon\left(2h + \dfrac{13}{5}v\right), \\ \dot{s} = -\varepsilon\delta s, \end{cases} \tag{3}$$

где v, h, $s \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \ll 1$.

Применяя метод кривизны потока, легко получить выражение для инвариантного многообразия

$$h(s,v) = \frac{1 - v + v^3 + 2sv\gamma}{2} + -\frac{10 + 16v + 10v^3 + 20sv\gamma - 10sv\gamma\delta}{10\gamma s + 15v^2 - 5}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{4}$$

которое очевидно является разрывным (рисунок 2а).



а) б)

Рисунок 2. Медленная поверхность для самосопряженной модели ФитцХью-Нагумо (зеленая) и интегральное многообразие первого порядка точности (желтое) а) при $\varepsilon = 0.05$, $\gamma = -1.05$, $\delta = 1$; б) при использовании склеивающей функции.

Однако, как и в прошлом случае если рассматривать δ в качестве управляющей функции модели (3), то при условии что

$$\delta(v) = \frac{20v^3 - 26v - 10}{15v^3 - 5v} + O\left(\varepsilon\right),$$

инвариантное многообразие (4) примет вид

$$h(s, v) = \frac{1 - v + v^3 + 2sv\gamma}{2} + \frac{10 + 16v + 10v^3}{5 - 15v^2}\,\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right),$$

непрерывный в рассматриваемой области пространства $v > 1/\sqrt{3}$ (рисунок 2б).

Следует отметить, что рассмотренный выше метод кривизны потока позволяет не только выписать асимптотические разложения параметризаций листов интегрального многообразия с необходимой степенью точности, но и допускает их «подклейку» как в одной, так и сразу во всех точках поверхности срыва.

Это означает возможность сравнительно несложного построения инвариантных многообразий динамических систем с переменной устойчивостью, что позволяет в некоторых случаях моделировать критические режимы различных процессов достигая их стабильности и предсказуемости.

1. Литература

[1] Balabaev, M. Black swan and curvature in an autocatalator model / M. Balabaev. — Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 201. – P. 561-566.
[2] Ginoux, J.M. Differential geometry applied to dynamical systems / J.M. Ginoux. — Singapore: World Scientific, 2009. – Vol. 3.
[3] Darboux, J.G. Mémoire sur les équations différentielles dlgébriques du premier ordre et du premier degré / J.G. Darboux. — Bull. Sci. Math. – 1878. – Vol. 2. – P. 60-96, 123-143, 151-200.
[4] Demazure, M. Catastrophes et bifurcations / M. Demazure. — Paris: Ellipses., 1989.
[5] Desroches, M. Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system /M. Desroches, B. Krauskopf, H. Osinga. Chaos // Woodbury, N.Y. – 2008. – Vol. 18. — P. 15-107.
[6] FitzHugh, R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve / R. FitzHugh — N.Y.: Biological Engineering, 1969. — p. 1-85.
[7] Peng, B. False bifurcations in chemical systems: canards / B. Peng, V. Gáspár, K. Showalter // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1991. – Vol. 337. – P. 275-289.
[8] Rossetto, B. Singular Approximation of Chaotic Slow-fast Dynamical Systems / B. Rossetto // Lecture Notes in Physics. – 1986. – Vol. 278. — P. 12-14.
[9] Shchepakina, E. Canards and black swans in model of a 3-D autocatalator / E. Shchepakina // Journal of Physics: conference series. – 2005. – Vol. 22. — P. 194-207.
[10] Балабаев, М.О. Методы дифференциальной геометрии в задачах редукции динамических моделей с сингулярными возмущениями / М.О. Балабаев. — Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы ИТНТ-2017. – Самара: Новая техника, 2017. – С. 1173-1175.
[11] Балабаев, М.О. Метод кривизны потока в задаче горения / М.О. Балабаев // — Сборник трудов IV международной конференции и молодежной школы ИТНТ-2018. – Самара: Новая техника, 2018. – С. 1996-2000.
[12] Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Г. Либрович, Г.М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 478 с.
[13] Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина — М.: Физматлит, 2010. — 320 с.

Curvature in the construction of smooth invariant manifolds of dynamic models

M.O. Balabaev[1]

[1]Nayanova university, Molodogvardeyskaya st. 196, Samara, Russia, 443001

Abstract. In the framework of this paper we regard a flow curvature method applied to constructing of invariant manifolds of dynamical models. We show that a self-coupled FitzHugh-Nagumo model and 3d-autocatalator model have sufficiently smooth invariant surfaces.