

# Кластерная реализация алгоритма согласованной идентификации фундаментальной матрицы в задаче сопоставления изображений

А.В. Гаврилов<sup>а</sup>, Е.В. Гошин<sup>а</sup>, К.Г. Пугачев<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

В статье рассматривается кластерная реализация параллельного алгоритма согласованной идентификации фундаментальной матрицы по малому числу соответствующих точек на изображениях. Метод согласованной идентификации состоит в том, что исходная переопределенная система разбивается на подсистемы небольшой размерности, на которых ищется множество оценок. Затем на этом множестве определяется подмножество наиболее согласованных оценок, на котором затем строится искомая точечная оценка. При формировании подсистем путем всех возможных сочетаний строк исходной системы вычислительная сложность метода высокая. Однако за счет этого обеспечивается высокая точность и надежность оценок. Приведены результаты исследования точности и надежности алгоритма в рассматриваемой задаче по сравнению с методом наименьших квадратов и методом наименьших модулей.

*Ключевые слова:* согласованная идентификация; параллельный алгоритм; метод наименьших квадратов; метод наименьших модулей; эпиполярная геометрия; проективная геометрия

## 1. Введение

Задача идентификации [1] заключается в построении оптимальной в некотором смысле, модели объекта (системы) по результатам наблюдений входных и выходных данных. Часто идентификация объекта должна проводиться по крайне малому объему измерений. Это может быть связано с требованием оперативности, высокой стоимостью или невозможностью большого числа измерений и др.

В этом случае подходящим является так называемый метод согласованной идентификации (МСИ), свободный от использования априорных предположений о распределении ошибок измерений. Этот метод рассматривался в работе [2,3] применительно к задаче идентификации управляемого объекта. Важной особенностью этого метода является устойчивость к грубым ошибкам типа сбоев. При этом в случае нормальных ошибок наблюдений результаты обычно совпадают с оптимальными процедурами МНК и МНМ. Высокая точность и надежность метода в данном случае обеспечивается за счет использования большого числа подсистем, формируемых путем различных сочетаний строк исходной системы. Однако вследствие этого метод имеет высокую вычислительную сложность и требует больших затрат памяти. В связи с этим возникает необходимость построения параллельного алгоритма, реализуемого на многопроцессорной системе.

## 2. Постановка задачи согласованной идентификации

Рассматривается задача оценивания вектора параметров  $\mathbf{c}$  линейной модели:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{c} + \boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{X}$  – наблюдаемые в эксперименте  $N \times 1$ -вектор и  $N \times M$ -матрица, составленная из строк  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  соответственно, а  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$  –  $N \times 1$ -вектор неизвестных ошибок. Задача идентификации заключается в определении по наблюдениям  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{X}$   $M \times 1$ -вектора оценок  $\hat{\mathbf{c}}$ . Если априорная информация об ошибках отсутствует, то обычно применяют метод наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\mathbf{c}} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (2)$$

Известно, что МНК-оценки являются несмещёнными и эффективными при обычных предположениях [4]. Однако при малом числе наблюдений эти предположения оказываются ненадежными из-за недостаточной статистической устойчивости вероятностных характеристик. Метод согласованной идентификации опирается на предположение, что решения, полученные на подсистемах, наиболее свободных от шума, будут более близкими (согласованными), а задача состоит в определении такой подсистемы. Приведем краткое описание алгоритма идентификации, основанного на принципе согласованности оценок.

Из исходной системы (2) «извлекается» некоторое множество подсистем малой размерности:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{c}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

В каждую подсистему (3) войдут строки исходной системы (2). Эти подсистемы далее будем называть *подсистемами нижнего уровня*. При этом множество подсистем нижнего уровня будет содержать  $C_N^M$  подсистем с квадратными  $M \times M$ -матрицами  $X_k$ . Вычисляя по доступным для каждой подсистеме (3) наблюдениям  $X_k, y_k$  оценку  $\hat{c}_k$ , можно получить соответственно  $C_N^M$  всех возможных оценок на подсистемах нижнего уровня.

Аналогичным образом можно сформировать множество из  $C_N^P$  подсистем верхнего уровня размерности  $P \times N$ :

$$\tilde{y}_l = \tilde{X}_l c_l + \tilde{\xi}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (4)$$

Каждой  $l$ -й подсистеме верхнего уровня (4) принадлежит некоторое множество подсистем нижнего уровня (3), на которых вычисляется соответствующее множество  $\Theta(l)$  оценок  $\hat{c}_{l,k}$ :

$$\Theta(l) = \{\hat{c}_{l,k} \in \Theta(l)\} \quad l = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Для характеристики согласованности множеств  $\Theta(l)$  вводится функция взаимной близости оценок:

$$W(l) = \sum_{\substack{i,j=\overline{1,K} \\ i \neq j}}^K (\hat{c}_{l,i} - \hat{c}_{l,j})^2, \quad (5)$$

где  $\hat{c}_{l,i}, \hat{c}_{l,j}, l = \overline{1, L}, i = \overline{1, K}, j = \overline{1, K}$  – оценки, полученные на подсистемах нижнего уровня, принадлежащих  $l$ -й подсистеме верхнего уровня. Индексы  $i, j$  в правой части (5) перебираются во всех возможных парных сочетаниях.

Множество  $\Theta(l)$  оценок  $\hat{c}_{l,k}, k = \overline{1, K}, K = C_P^M$ , для которого  $W(l)$  принимает минимальное значение, называется наиболее согласованным. Гипотеза состоит в том, что наиболее согласованная подсистема является наименее зашумленной, поэтому задача сводится к отысканию номера подсистемы верхнего уровня  $\hat{l}$ :

$$W(\hat{l}) = \min_l W(l), \quad l = \overline{1, L}, \quad L = C_N^P.$$

На  $\hat{l}$ -й подсистеме верхнего уровня может быть построена либо точечная оценка, либо указано «облако» решений [2].

Нетрудно заметить, что реализация описанного алгоритма согласованной идентификации требует больших вычислительных ресурсов. Факт высокой вычислительной сложности метода согласованной идентификации – это неизбежная плата за недостаток априорной информации при малом числе наблюдений. В связи с этим возникает необходимость в построении эффективного параллельного алгоритма для сокращения времени вычислений.

### 3. Параллельный алгоритм согласованной идентификации

В работе [5] был представлен параллельный алгоритм согласованной идентификации, в котором группы подсистем верхнего уровня формируются на разных процессорах. В настоящей работе приводятся результаты исследования эффективности реализации параллельной схемы, а также приводится пример ее использования при решении практической задачи идентификации фундаментальной матрицы.

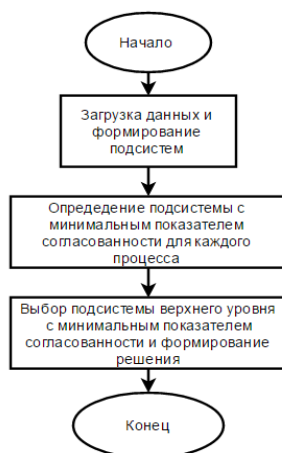


Рис. 1. Общая схема алгоритма.

На рис. 1 представлена общая блок-схема предлагаемого алгоритма, на рис. 2 – подробные блок-схемы этапов алгоритма: 2а – загрузка данных и формирование подсистем, 2б – определение подсистемы верхнего уровня с минимальным показателем согласованности для каждого процесса, 2в – выбор подсистемы верхнего уровня с минимальным показателем согласованности и формирование решения.

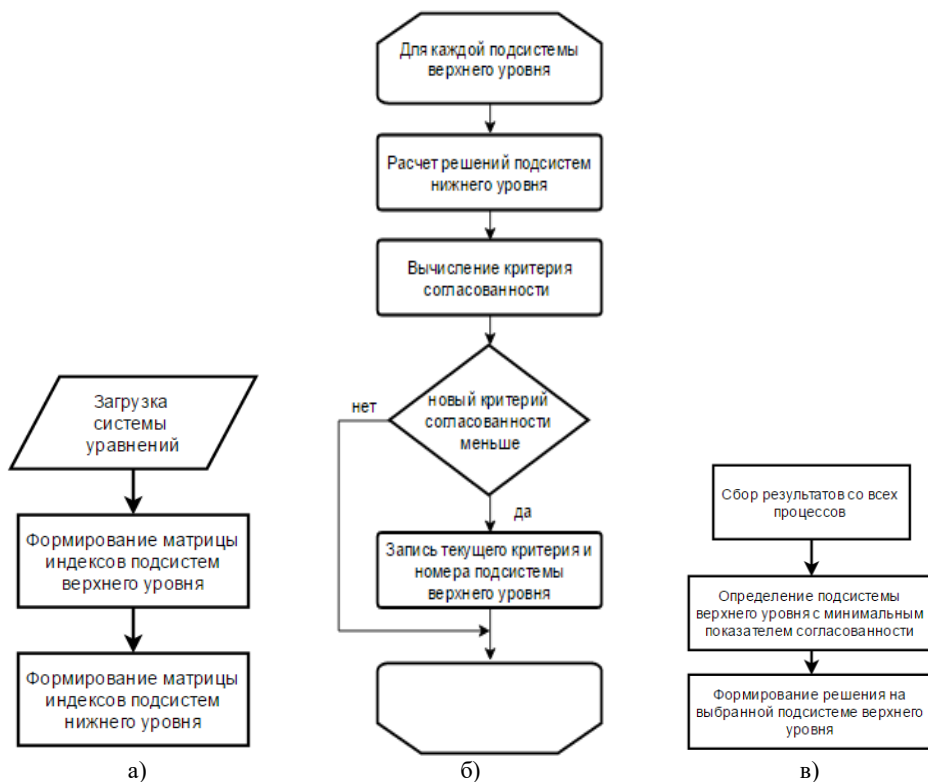


Рис. 2. Основные этапы алгоритма.

Для приведенного выше алгоритма были исследованы характеристики ускорения и эффективности на примере задачи идентификации с параметрами  $N=18$ ,  $M=9$ ,  $P=16$ . Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. Ускорение и эффективность параллельного алгоритма

Число процессов	Время работы	Ускорение	Эффективность
1	793,530322	1,000000	1,000000
2	399,019544	1,988700	0,994350
3	264,601322	2,998966	0,999655
4	202,061476	3,927173	0,981793
5	170,967832	4,641401	0,928280
6	145,024123	5,471713	0,911952
7	139,921319	5,671261	0,810180
8	103,603291	7,659316	0,957414

#### 4. Постановка задачи идентификации фундаментальной матрицы

Используется модель камеры-обскуры, при предположении, что оба изображения получены камерами с одинаковыми матрицами внутренних параметров:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $f$  – фокусное расстояние камер,  $(u_0, v_0)$  – координаты главных точек камер в системах координат, связанных с камерами.

Пусть  $\mathbf{M}$  – некоторая точка в глобальной системе координат. Вектор координат точки  $\mathbf{M}$  в глобальной системе координат связан с векторами координат этой точки в системах координат первой –  $\mathbf{m}_1$  и второй –  $\mathbf{m}_2$  камер соотношениями [6]:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{M}, \quad (7)$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{M}, \quad (8)$$

где так называемые матрицы проекций определяются как

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{K}_1 [\mathbf{R}_1; \mathbf{t}_1], \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{K}_2 [\mathbf{R}_2; \mathbf{t}_2]. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  – матрицы размерности  $3 \times 3$ , описывающие поворот систем координат первой и второй камер относительно глобальной, а  $\mathbf{t}_1 = [t_{1,x}, t_{1,y}, t_{1,z}]^T$ ,  $\mathbf{t}_2 = [t_{2,x}, t_{2,y}, t_{2,z}]^T$  – координаты начала глобальной системы координат в системах координат первой и второй камер соответственно.

При этом выполнение ограничений (5) обеспечивается тем, что матрица  $\mathbf{R}$  формируется в виде  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z$ ,

где

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \pm \sin(\alpha) \\ 0 & \mp \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \pm \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \pm \sin(\gamma) & 0 \\ \mp \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Соответствующие точки на двух проекциях связаны фундаментальной  $3 \times 3$ -матрицей  $F$  [6], в частности, для точек, координаты которых заданы  $3 \times 1$ -векторами  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ :  $\mathbf{m}_1 = [u_1, v_1, 1]^T$ ,  $\mathbf{m}_2 = [u_2, v_2, 1]^T$  выполняется условие

$$\mathbf{m}_1^T F \mathbf{m}_2 = 0, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}.$$

Соотношение для вычисления фундаментальной матрицы имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-T} [\mathbf{t}]_x \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1}, \quad (13)$$

где  $[\mathbf{t}]_x$  определяется выражением:

$$[\mathbf{t}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Для  $N$  пар ( $N \geq 8$ ) соответствующих точек, принимая  $F_{33} = 1$ , может быть сформирована система линейных уравнений вида (1) для вычисления оценки вектора  $\mathbf{c}$  искомым значениям фундаментальной матрицы:

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_8]^T = [F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}]^T,$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1' u_1 & u_1' v_1 & u_1' & v_1' u_1 & v_1' v_1 & v_1' & u_1 & v_1 \\ u_2' u_2 & u_2' v_2 & u_2' & v_2' u_2 & v_2' v_2 & v_2' & u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N' u_N & u_N' v_N & u_N' & v_N' u_N & v_N' v_N & v_N' & u_N & v_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$\xi$  — ошибки, связанные с неточным определением координат соответствующих точек.

Оценка  $\hat{\mathbf{c}}$  вектора  $\mathbf{c}$  может быть получена посредством решения сформированной системы (15) с применением метода наименьших квадратов (МНК), метода наименьших модулей, RANSAC [7] или согласованной идентификации.

## 5. Экспериментальное исследование точности и надежности

При моделировании исходных данных были использованы следующие параметры:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 960 & 0 & 960 \\ 0 & 540 & 960 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

При формировании элементов матрицы  $\mathbf{R}_2$  в (11) углы  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  задавались в интервале  $[0, 8]$ . Вектор  $\mathbf{t}_2$  задавался как:

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix}, \quad \rho \in [5, 6], \quad \varphi \in [0, 360], \quad z \in [-1, 1].$$

По указанным выше параметрам было сформировано сто наборов точек  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ . В сформированные наборы точек был внесен гауссовский шум с  $SNR=70$  и мат. ожиданием, равным нулю. После чего случайным образом вносилась грубая ошибка. Для каждого смоделированного набора соответствующих точек была сформирована система линейных уравнений вида (14). Далее были рассчитаны оценки  $\hat{\mathbf{c}}$  коэффициентов фундаментальной матрицы с использованием метода наименьших квадратов, метода наименьших модулей и методом согласованной идентификации. Каждый элемент полученной матрицы  $\mathbf{F}$  был также подвергнут нормированию:

$$\bar{F}_{ij} = F_{ij} / k, \quad k = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 F_{ij}^2}.$$

В таблице 2 приведен пример полученных коэффициентов фундаментальных матриц, рассчитанных с применением метода наименьших квадратов, метода наименьших модулей и метода согласованной идентификации.

**Таблица 2.** Рассчитанные коэффициенты фундаментальных матриц

Коэффициент	МНК	МНМ	МСИ
$F_{11}$	-0,000000014932	-0,000000010971	0,000000011797
$F_{12}$	0,000000248007	0,000000236453	0,000001220837
$F_{13}$	-0,000201359435	-0,000257494831	-0,002509849537
$F_{21}$	-0,000000073166	-0,000000056526	-0,000000816790
$F_{22}$	0,000000210040	0,000000212027	0,000000260237
$F_{23}$	-0,003789308065	-0,003834886363	-0,005563520975
$F_{31}$	-0,000175056875	-0,000048552165	0,001810212091
$F_{32}$	0,002871118645	0,003090451860	0,004775402386
$F_{33}$	0,999989351235	0,999987836972	0,999968332774

Для определения показателя надежности методов для каждой системы формировался набор из пятисот соответствующих точек  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ . Для каждой пары соответствующих точек рассчитывались расстояния до эпиполярных прямых  $d_i, i=1, 500$ :

$$d_i = \frac{|l_{i1}u + l_{i2}v + l_{i3}|}{\sqrt{l_{i1}^2 + l_{i2}^2}}, \quad (15)$$

где  $(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$  удовлетворяют равенству

$$\begin{pmatrix} l_{i1} \\ l_{i2} \\ l_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}. \quad (16)$$

В качестве меры точности методов использовались значения  $d_k, k=\overline{1,100}$ , которые рассчитывались по формуле:

$$d_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{500} d_{ki}^2}, \quad (17)$$

где  $d_{ki}$  – расстояние до  $i$ -й «тестовой» точки до эпполярной прямой для  $k$ -го набора точек  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ .

В таблице 3 приведены максимальные и минимальные значения  $d_k$  для каждого метода.

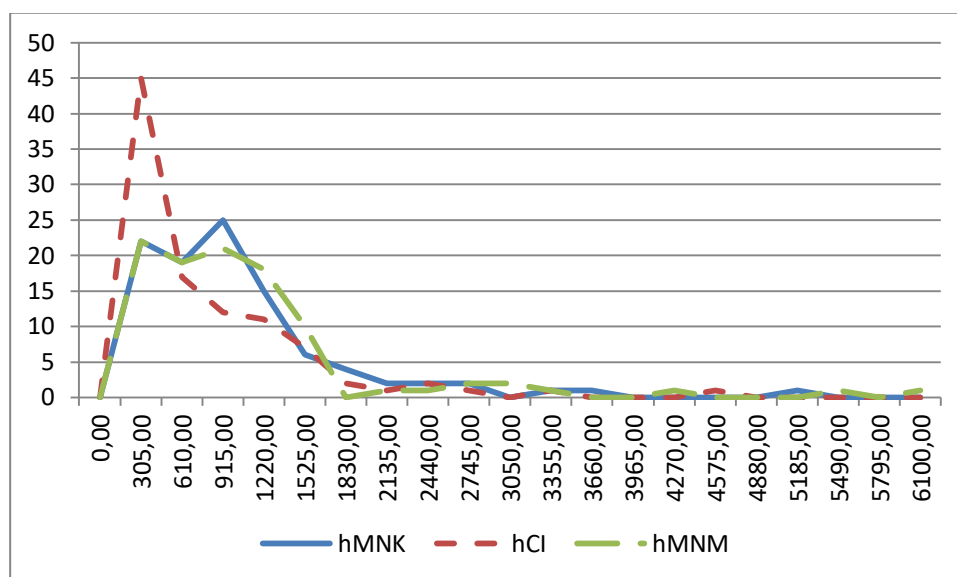
**Таблица 3.** Значения  $d_k$

	МНК	МНМ	МСИ
Максимальное СКО	8607,111	10648,111	7600,614
Минимальное СКО	52,831	52,761	22,874

Для множества значений  $d_k$ , вычисленных по формуле (17) были построены гистограммы. Для этого интервал возможных значений разбивался на 20 интервалов  $\Delta d_l, l=\overline{1,20}$  и для каждого интервала были определены оценки вероятности для значений критерия  $d_k \in \Delta d_l$ :

$$\hat{p}_l = \frac{\sum_{i=1}^m N_l}{N}, \quad (17)$$

где  $N$  – общее число сформированных точек,  $N_l$  – количество точек, входящих в  $l$ -й интервал гистограммы,  $m$  – число интервалов гистограммы. Гистограммы показаны на рис. 3.



**Рис. 3.** Гистограммы распределения по  $d_k$ .

На рисунке 4 показаны графики зависимости надежности  $\hat{p}_l$  от погрешности  $d_k$  для каждого из методов.

Из графиков на рисунках 3,4 видно, что метод согласованной идентификации имеет более высокую точность по сравнению с МНК и МНМ. Надежность метода согласованной идентификации выше, по сравнению с МНК и МНМ. В данной задаче идентификации фундаментальной матрицы МНК даст более точное решение чаще по сравнению с МНМ.

Было проведено исследование точности и надежности методов согласованной идентификации и RANSAC. На рисунке 5 приведены гистограммы и графики зависимости надежности от точности для обоих методов.

Из графиков на рисунке 5 видно, что метод согласованной идентификации незначительно превосходит метод RANSAC по точности и надежности. Также метод согласованной идентификации не требует задания порогового значения и числа итераций как RANSAC.

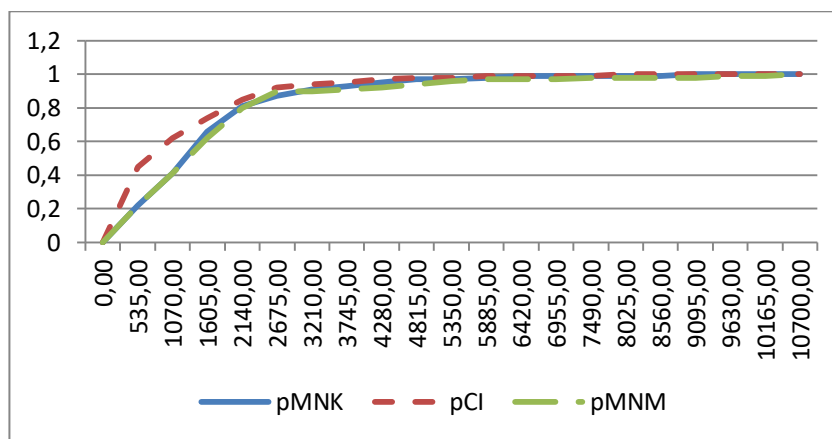
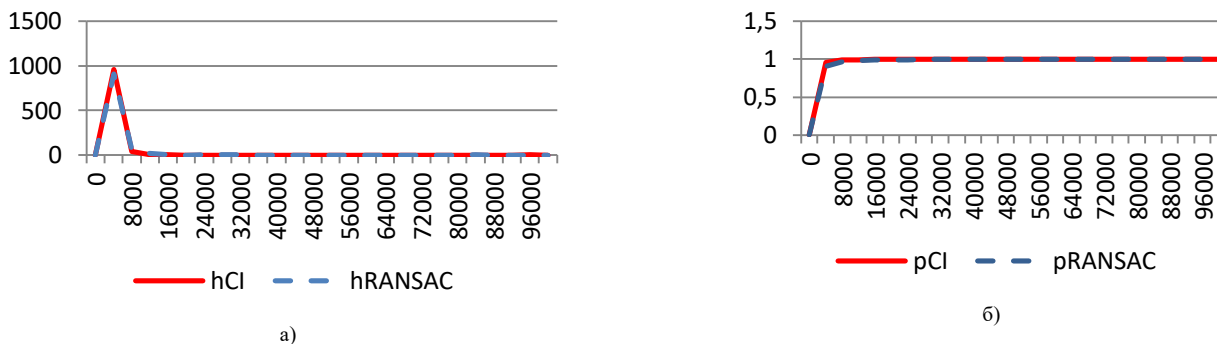


Рис. 4. Графики зависимости надежности от точности.



а)

б)

а) Гистограммы распределения по точности  
б) График зависимости надежности от точности

Рис. 5. Гистограммы и графики зависимости надежности от точности.

## 6. Заключение

При решении задачи идентификации фундаментальной матрицы было установлено, что метод согласованной идентификации позволяет получать более точное решение и имеет более высокую надежность по сравнению с МНК и МНМ. Метод согласованной идентификации незначительно превосходит метод RANSAC по точности и надежности. Также метод согласованной идентификации не требует задания порогового значения и числа итераций как RANSAC.

Построенный параллельный алгоритм является хорошо масштабируемым. Время, затрачиваемое на вычисления, уменьшается практически линейно при увеличении числа используемых процессов. Эффективность также является достаточно высокой, т.к. нагрузка равномерно распределяется между процессорами. При увеличении размерности исходной (числа строк  $N$ ) время работы программы значительно возрастает.

## Благодарности

Авторы выражают благодарность научному руководителю, д.т.н., профессору Фурсову Владимиру Алексеевичу за помощь при подготовке настоящей работы, постановке задачи и ряд важных замечаний. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00729 а).

## Литература

- [1] Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления / Эйкхофф П. ; пер. с англ. под ред. Н.С. Райбмана. –М.: Мир, 1975. – 681 с.
- [2] Fursov, V.A. Conforming Identification of the Controlled Object / Vladimir A. Fursov, Andrey V. Gavrillov // Proceeding International Conference on Computing, Communications and Control Technologies: CCCT'2004, August 14-17, 2004 - Austin, Texas, USA. P. 326-330.
- [3] Фурсов, В.А. Согласованная идентификация управляемого объекта по малому числу наблюдений // Теоретический и прикладной научно-технический журнал "Мехатроника, автоматизация, управление", Москва. Новые технологии, 2010, 3(108), С. 2-8.
- [4] Lawson, C. L. Solving least squares problems / Lawson C. L., Hanson R. J. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice-hall, 1974. – 340 p.
- [5] Пугачев, К.Г. Кластерная реализация алгоритма согласованной идентификации / Пугачев К.Г., Гошин Е.В., Фурсов В.А. // Сборник материалов Международной Конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (Конференция ИТНТ-2016), (Самара, 17-19 марта 2016 г.). СГАУ. - 2016. – С. 994-999.
- [6] Грузман, И.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учебное пособие / И.С. Грузман, В.С. Киричук, В.П. Косых и др. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 352 с.
- [7] Fischler, M.A. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography / Martin A. Fischler, Robert C. Bolles // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 24. – P. 381-392.