

# Класс нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблем нелинейной механики разрушения

А.А. Пекшева<sup>а</sup>, Л.В. Степанова<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

В настоящей работе получено асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими соотношениями. Проведенный асимптотический анализ показал, что метод искусственного малого параметра является эффективным средством для вычисления собственных значений и соответствующих им собственных функций, даже для больших значений показателя нелинейности материала  $n$ . Показано, что чем больше значения  $n$ , тем больше слагаемых следует удерживать в асимптотическом разложении искомых функций, что приводит к значительному усложнению процедуры построения собственных функций в случае более сложных задач с математической точки зрения: задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига, а также для смешанного нагружения тела с трещиной. В силу указанного свойства в настоящей работе собственные функции были построены с помощью аппроксимаций Паде (АП) различных порядков. Показано, что АП порядка [1,2] дает очень хорошее приближение для собственных функций

*Ключевые слова:* нелинейные задачи на собственные значения; метод разложения по собственным функциям; метод искусственного малого параметра; аппроксимация Паде (АП)

## 1. Введение

Одним из наиболее часто применяемых методов при анализе полей напряжений, деформаций и перемещений у вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями является метод разложения по собственным функциям [1-4]. В соответствии с методом разложения по собственным функциям решение задачи разыскивается в форме произведения двух функций, одна из которых зависит от расстояния от кончика трещины, а другая является функцией полярного угла в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины. Метод разложения по собственным функциям приводит к классу нелинейных задач на собственные значения: необходимо найти собственное значение (показатель степени радиальной координаты), отвечающее нетривиальному решению системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках такого подхода показатель степени радиальной координаты может быть интерпретирован как собственное значение, а функция, зависящая от полярного угла, может быть интерпретирована как собственная функция, отвечающая данному собственному значению. Для решения нелинейной задачи на собственные значения в настоящей работе применяется метод искусственного малого параметра [5]. Показано [6-9], что рассматриваемый подход является эффективным методом решения нелинейных задач на собственные значения. В соответствии с методом малого параметра в настоящей работе будет получено решение задач на собственные значения.

## 2. Математическая постановка задачи

Определение полей напряжений деформаций требует решения системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия, условия совместности и определяющих уравнений

$$r\sigma_{rz,r} + \sigma_{rz} + \sigma_{\theta z,\theta} = 0, \quad \varepsilon_{rz,\theta} - r\varepsilon_{\theta z,r} - \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $B$ ,  $n$  – постоянные материала, определяемые экспериментально;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma_{kk}\sigma_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;  $\sigma_e = \sqrt{3/2s_{ij}s_{ij}}$  – интенсивность касательных напряжений;  $r, \theta$  – полярные координаты с полюсом в вершине дефекта. разыскивается в форме

$$\chi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta), \quad \sigma_{rz} = \chi_{,\theta}/r, \quad \sigma_{rz} = -\chi_{,\theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -\chi_{,r}, \quad (2)$$

где  $\chi(r, \theta)$  – функция напряжений.

Условие совместности деформаций (1) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (НОДУ) второго порядка относительно функции  $f(\theta)$

$$f(\theta)''[n(f(\theta)')^2 + \lambda^2 f(\theta)^2] + f[C_1(f(\theta)')^2 + C_2 f(\theta)^2] = 0, \quad (3)$$

где приняты обозначения

$$C_1 = \lambda(n-1)(2\lambda-1) + \lambda^2, \quad C_2 = \lambda^3(n-1)(\lambda-1) + \lambda^4. \quad (4)$$

Функция  $f(\theta)$  должна удовлетворять граничным условиям – условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f|_{\theta=\pm(\pi-\alpha)} = 0. \quad (5)$$

Вместе с граничными условиями (5) – условиями отсутствия поверхностных усилий – уравнение (3) определяет нелинейную задачу на собственные значения: необходимо найти нетривиальное решение НОДУ, удовлетворяющее краевым условиям (5).

Аналитическое выражение для собственных значений нелинейной задачи для дифференциального уравнения (3) с краевыми условиями (5) было получено ранее с помощью метода искусственного малого параметра [2, 3], в соответствии с которым представим собственное число  $\lambda$  в виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (6)$$

где  $\lambda_0$  относится к линейной, «невозмущенной» задаче и  $\varepsilon$  – отклонение собственного значения нелинейной задачи от собственного значения линейной задачи, обусловленное нелинейностью. Представим показатель упрочнения  $n$  и функцию напряжений  $f(\theta)$  в форме

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots, \quad (7)$$

где  $n_0 = 1$  и  $f_0(\theta)$  относятся к линейной "невозмущенной" задаче.

Целью настоящей работы является определение собственных функций и анализ сходимости асимптотических разложений (7).

Подставим асимптотическое разложение (6), (7) в уравнение (3) и собирая слагаемые с одинаковой степенью  $\varepsilon$ , получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon^0: (f_0(\theta))'' + \lambda_0^2 f_0(\theta) = 0,$$

$$\varepsilon^1: (f_1(\theta))'' + \lambda_0^2 f_1(\theta) = -\lambda_0 [n_1(\lambda_0 - 1) + 2] f_0(\theta),$$

$$\varepsilon^2: (f_2(\theta))'' + \lambda_0^2 f_2(\theta) = -(f_0(\theta))'' [n_2((f_0(\theta))')^2 + (f_0(\theta))^2] \frac{1}{\lambda_0^2} -$$

$$-f_0(\theta) [C_1^2((f_0(\theta))')^2 + C_2^2((f_0(\theta))')^2] \frac{1}{\lambda_0^2},$$

$$\varepsilon^3: (f_3(\theta))'' + \lambda_0^2 f_3(\theta) =$$

$$= -\frac{[n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)]\lambda_0 f_0(\theta) g_1}{g_0} - \frac{[1 + n_1(\lambda_0 - 1)]f_0(\theta) g_1}{g_0} - \frac{2\lambda_0 n_2 (f_0(\theta))'^2 f_0(\theta)}{g_0}$$

$$- \lambda_0 [n_2 + n_3(\lambda_0 - 1)] f_0(\theta) - [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)] f_0(\theta) - \frac{((f_2(\theta))'' + \lambda_0^2 f_2(\theta)) (g_1 + n_1 (f_0(\theta))'^2)}{g_0}$$

$$- n_1 (f_0(\theta))'^2 f_0(\theta) / g_0$$

где  $C_1^2 = n_1(4\lambda_0 - 1) + n_2\lambda_0(2\lambda_0 - 1) + 1$ ,  $C_2^2 = \lambda_0^3 [n_2(\lambda_0 - 1) + n_1]$ ,  $g_0 = (f_0(\theta))'^2 + \lambda_0^2 (f_0(\theta))^2$ ,  
 $g_1 = 2(f_0(\theta))' (f_1(\theta))' + 2\lambda_0 (f_0(\theta))^2 + 2\lambda_0^2 f_0(\theta) f_1(\theta)$

Получая последовательно решения краевых задач для функций  $f_0(\theta), f_1(\theta), f_2(\theta), \dots, f_k(\theta), \dots$ , можно увидеть, что асимптотическое разложение для функции  $f(\theta)$  (7) представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой может быть вычислена и представлена в следующей форме:

$$f(\theta) = ((n+1)/n) \sqrt{\left[ \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta) + \cos \theta} \right] \left[ \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta) - k \cos \theta} \right]^k / (2(1-k)^k)}.$$

Таким образом, метод искусственного малого параметра является удобным средством для решения нелинейных задач на собственные значения. На рис. 1 изображены 4 кривые. Кривая черного цвета показывает численное решение задачи, полученное методом Рунге-Кутты-Фельберга, кривая красного цвета – нулевое приближение, кривые синего и зеленого цвета – трехчленное и четырехчленное асимптотическое разложения. Видно из рис.1, что по мере увеличения числа слагаемых в асимптотическом разложении кривые становятся все ближе к искомой кривой черного цвета. Кривая зеленого цвета, определяемая трехчленным асимптотическим разложением, практически не заметна, она полностью совпадает с численным решением задачи (кривой черного цвета). Это означает, что трехчленное асимптотическое разложение дает приближенное решение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения.

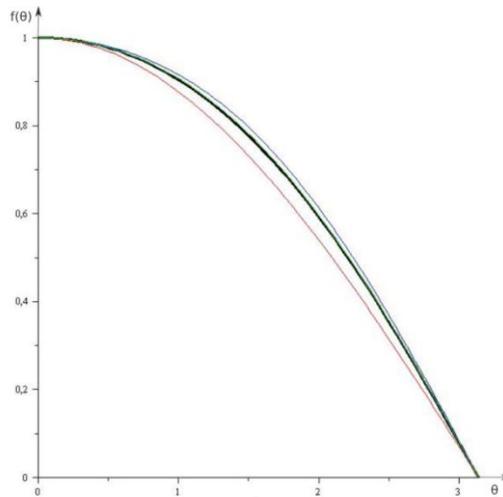


Рис. 1. Угловые распределения функции напряжения  $\chi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta)$ .

### 3. Заключение

В настоящей работе получено асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими соотношениями. Проведенный асимптотический анализ показал, что метод искусственного малого параметра является эффективным средством для вычисления собственных значений и соответствующих им собственных функций, даже для больших значений показателя  $n$ .

### Литература

- [1] Бьюи, Х.Д. Механика разрушения. Обратные задачи и решения/ Х.Д. Бьюи. – Москва: Физматлит, 2011. – 410 с.
- [2] Степанова, Л.В. Асимптотические методы нелинейной механики разрушения: результаты, современное состояние и перспективы/ Л.В.Степанова, Е.М. Адылина // Вестник СамГТУ. Естественно научная серия. - 2013. - №2 (31). - С.156 – 168.
- [3] Степанова, Л.В. Поле напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении в условиях плоского напряженного состояния/Л.В.Степанова, Е.М.Адылина // Вестник СамГТУ. Естественно научная серия. - 2014. - №1 (34). – С.109 – 124.
- [4] Степанова, Л.В. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке/ Л.В.Степанова, М.Е. Федина// Прикладная математика и механика. - 2008. - Т.72. №3. – С.516 – 527.
- [5] Андрианов, И. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела/ И. Андрианов, Я. Аврейцевич. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. –276 с.
- [6] Stepanova, L.V. Complete Williams Asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane/ L.V. Stepanova P.S. Roslyakov, T.E. Gerasimova// Solid State Phenomena. – 2017. – Vol. 258. – P. 209-212.
- [7] Stepanova, L. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium/ L.V. Stepanova, P.S. Roslyakov// International Journal of Solids and Structures. – 2016. –V. 100-101. – P. 11-28.
- [8] Степанова, Л.В., Асимптотика собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения/ Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева// Сибирский журнал вычислительной математики. – 2016. – №2.–С. 207-222.
- [9] Stepanova, L.V. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems/ L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva // AIP Conference Proceedings. – 2016. V. 1785. – 030030.