

Исследование устойчивости в модели распространения вирусов

Ю.Г. Ермошкина¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе исследуется устойчивость многообразия стационарных состояний в модели распространения вирусов. Модель представляет собой систему полулинейных параболических уравнений с многообразием состояний равновесия. Получены условия устойчивости и стабилизируемости этого многообразия.

1. Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), \quad (1)$$

где $t \in R; x \in X^\alpha$.

Множество $S \subset R \times X^\alpha$ называется локальным интегральным многообразием для дифференциального уравнения (1), если для любой пары $(t_0, x_0) \in S$ существует решение $x(\cdot)$ этого уравнения, определенное на некотором открытом интервале (t_1, t_2) , содержащим t_0 , и такое, что $x(t_0) = x_0$ и $(t, x(t)) \in S$ [1].

Множество S - интегральное многообразие, если всегда можно взять $(t_1, t_2) = (-\infty, \infty)$. В случае, когда дифференциальное уравнение автономно и $S = R \times S_1, S_1$ называется инвариантным многообразием.

Рассмотрим модель распространения вирусов. Данная система основана на уравнениях Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Рассмотрим задачу на промежутке $x \in [0, 1]$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1 u(x,t)(1 - q_1 v(x,t))(1 - u(x,t) - v(x,t)), \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a_2 v(x,t)(1 - q_2 u(x,t))(1 - u(x,t) - v(x,t)). \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе u, v - две популяции микроорганизмов, a_1, a_2 - коэффициенты воспроизводства для популяций u и v , соответственно, D_1, D_2 - коэффициенты диффузии, q_1, q_2 - коэффициенты взаимодействия особей разных популяций.

В качестве граничных условий в данной задаче рассматриваются условия непроницаемости на концах рассматриваемого промежутка. Они имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве начальных условий выбраны непрерывные функции, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \begin{cases} 0,9(-5(x-1)^2 + 1), u > 0, \\ 0, u \leq 0; \end{cases} \\
 v(x, 0) &= \begin{cases} 0,9(-5x^2 + 1), v > 0, \\ 0, v \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

2. Аналитическое исследование модели

Рассмотрим симметричный случай, когда коэффициенты первого и второго уравнения системы (2) равны, то есть

$$a_1 = a_2 = a, D_1 = D_2 = D, q_1 = q_2 = q.$$

Воспользовавшись принципом сведения для инвариантного многообразия, получим линеаризованную систему:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \alpha u(x,t) - \alpha v(x,t), \\
 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \beta u(x,t) - \beta v(x,t),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где $\alpha = a\bar{u}(1 - q(1 - \bar{u})), \beta = a(1 - \bar{u})(1 - q\bar{u})$.

С помощью метода разделения переменных найдем решение линеаризованной задачи.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-D(\pi n)^2 t} \cos \pi n x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha C_n}{\alpha + \beta} e^{-D(\pi n)^2 t} (e^{-(\alpha+\beta)t} - 1) \cos \pi n x, \\
 v(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-D(\pi n)^2 t} \cos \pi n x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta C_n}{\alpha + \beta} e^{-D(\pi n)^2 t} (e^{-(\alpha+\beta)t} - 1) \cos \pi n x.
 \end{aligned}$$

По показателям экспонент, входящих в данные выражения, понятно, что есть одно нулевое собственное число, а остальные собственные числа отрицательные. Это означает, что любое положение равновесия $(u_0, v_0), v_0 = 1 - u_0, u_0 \in [0,1]$, исходной системы (2) устойчиво. Значит, многообразие положений равновесия стабилизируемо.

Однако это справедливо при значении параметра $q < 2$, так как при $q = 2$ происходит потеря устойчивости системы.

3. Численное моделирование

Для иллюстрации вышесказанного проведем численное моделирование системы.

Для решения задачи (2)-(4) составим явную конечно-разностную схему. Для этого заменим дифференциальные операторы их сеточными аналогами. Получим:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \alpha u_i^k (1 - qv_i^k)(1 - u_i^k - v_i^k), \\ \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{\tau} = D \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2} + \alpha v_i^k (1 - qu_i^k)(1 - u_i^k - v_i^k). \end{cases}
 \tag{6}$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_1^{k+1} - u_{-1}^{k+1}}{h} &= 0; \\
 \frac{v_1^{k+1} - v_{-1}^{k+1}}{h} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Определим начальные условия следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_i^0 &= \begin{cases} 0,9(-5(x_i - 1)^2 + 1), u_i^0 > 0, \\ 0, u_i^0 \leq 0; \end{cases} \\
 v_i^0 &= \begin{cases} 0,9(-5x_i^2 + 1), v_i^0 > 0, \\ 0, v_i^0 \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Их графики представлены на рисунке 1. Они задают начальное положение популяций вирусов в пространстве.

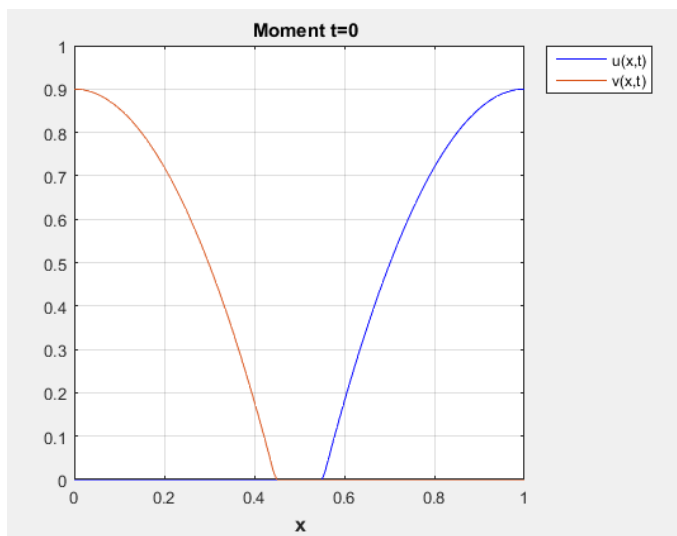


Рисунок 1. Графики начальных условий для u и v .

Для решения задачи (6)-(8) была реализована программа в среде Matlab, рассчитывающая значения сеточных функций на временном промежутке $0 \leq t \leq 600$.

Рассмотрим три различных случая:

1. $q < 2$,
2. $q \approx 2$,
3. $q > 2$.

3.1. Случай, когда $q < 2$

Для случая 1, когда $q = 1.5$, на рисунке 2 представлена динамика функции $u(x, t)$. Динамика для функции $v(x, t)$ представлена на рисунке 3. На рисунке 4 представлено решение в конечный момент времени $t = 600$.

3.2. Случай, когда $q \approx 2$

Для случая 2, когда $q = 2.05$, на рисунке 5 представлена динамика функции $u(x, t)$. Динамика для функции $v(x, t)$ представлена на рисунке 6. На рисунке 7 представлено решение в конечный момент времени $t = 600$.

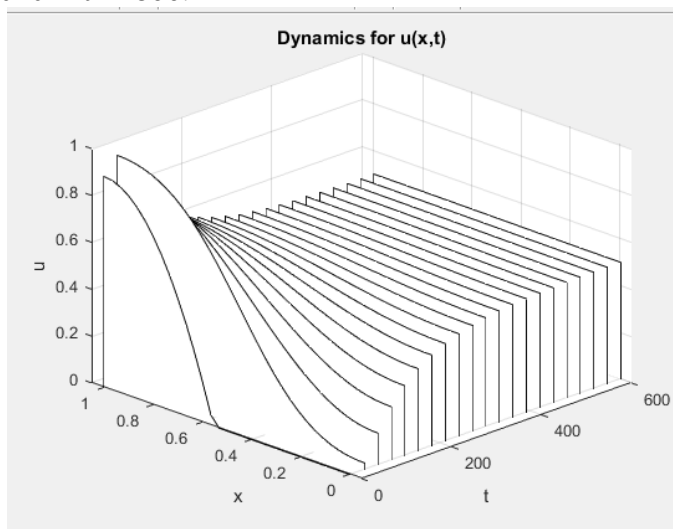


Рисунок 2. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 1.

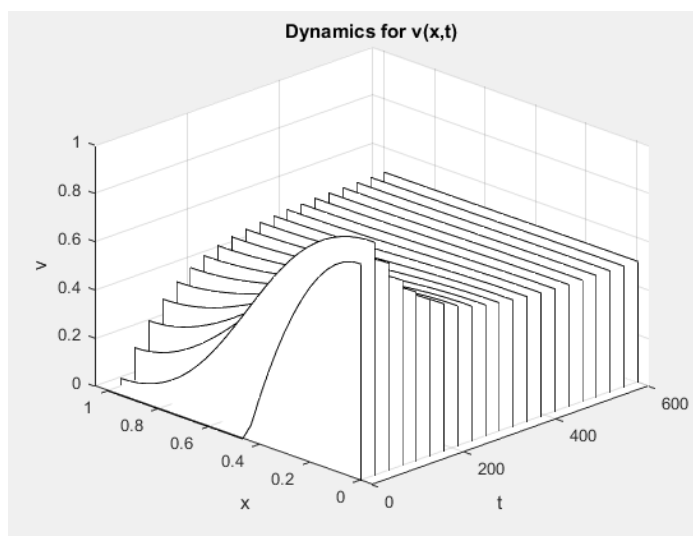


Рисунок 3. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 1.

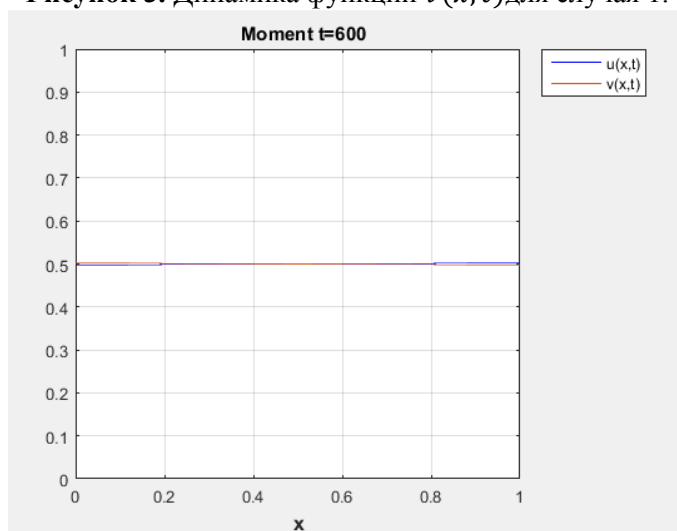


Рисунок 4. Решение в конечный момент времени $t = 600$ для случая 1.

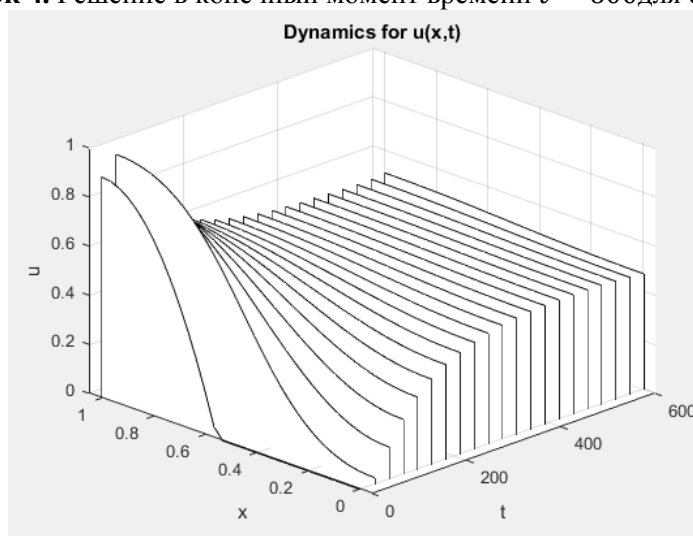


Рисунок 5. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 2.

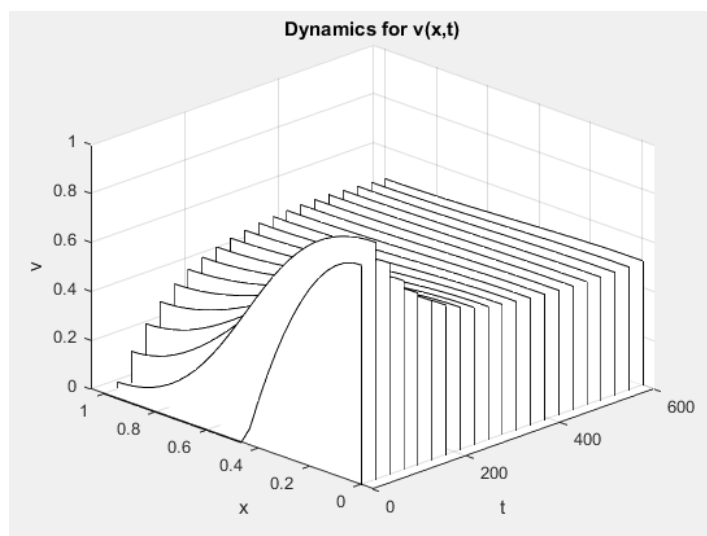


Рисунок 6. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 2.

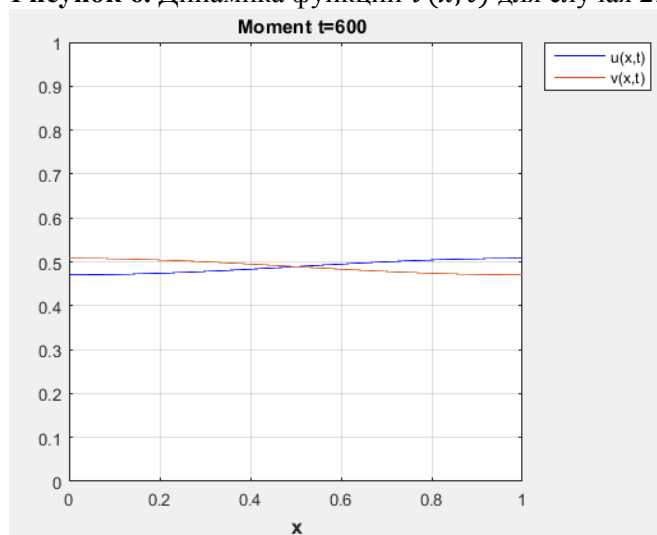


Рисунок 7. Решение в конечный момент времени $t = 600$ для случая 2.

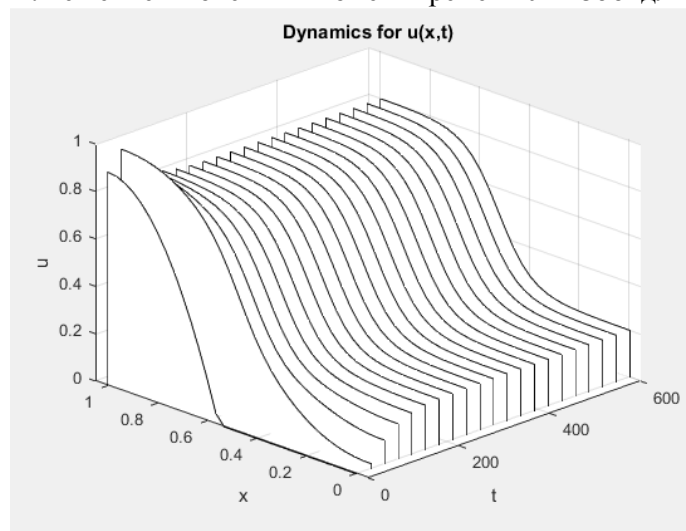


Рисунок 8. Динамика функции $u(x, t)$ для случая 3.

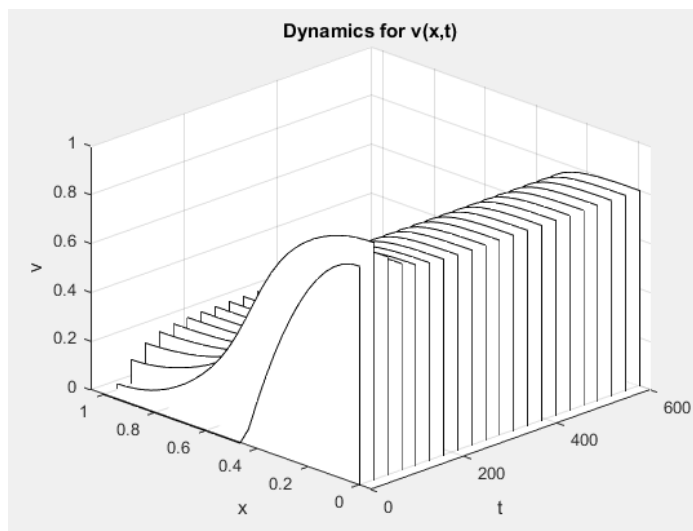


Рисунок 9. Динамика функции $v(x, t)$ для случая 3.

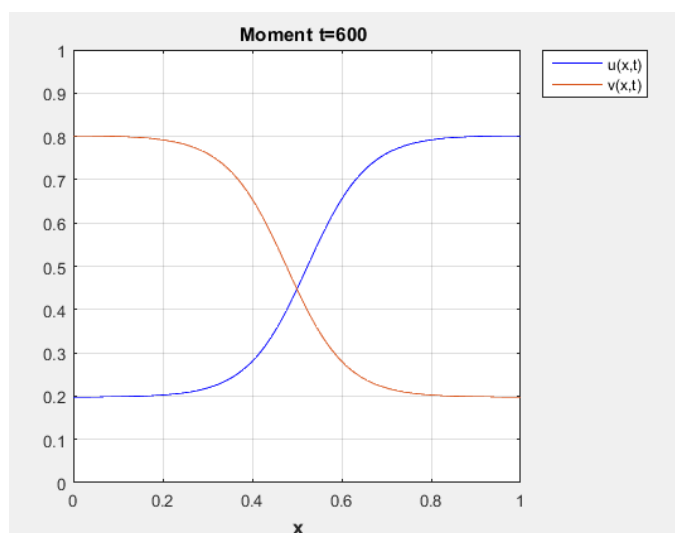


Рисунок 10. Решение в конечный момент времени $t = 600$ для случая 3.

3.3. Случай, когда $q > 2$

Для случая 3, когда $q = 2.5$, на рисунке 8 представлена динамика функции $u(x, t)$. Динамика для функции $v(x, t)$ представлена на рисунке 9. На рисунке 10 представлено решение в конечный момент времени $t = 600$.

4. Заключение

Таким образом, показано, что при $q_1 = q_2 < 2$ многообразие состояний равновесия системы стабилизируется, а при переходе через значение коэффициента взаимодействия $q_1 = q_2 = 2$ в системе происходит потеря устойчивости.

5. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта № 16-41-630529.

6. Литература

- [1] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Пер. с англ. / Д. Хенри – М.: Мир. – 1985. – 376 с.

- [2] Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
- [3] Strygin, V.V. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin / V.V. Strygin, V.A. Sobolev // *Cosmic Research*. – 1976. – Vol. 14. – P. 331-335.
- [4] Айзерман, М.А. Stabilität der Gleichgewichtslage im einem nicht-holonomen System / М.А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер // *Z. angew. Math, und Mech.* – 1957. – Vol. 37(1/2). – P. 74-75.
- [5] Неймарк, Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 520 с.
- [6] Калёнова, В.И. Неголономные механические системы и стабилизация движения / В.И. Калёнова, А.В. Карапетян, В.М. Морозов, М.А. Салмина // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2005. – Т. 11, № 7. – С. 117-158.
- [7] Murray J.D. Lectures on Nonlinear Differential-Equation Models in Biology / J.D. Murray // Clarendon Press, Oxford, 1977. – 379 p.
- [8] Murray, J.D. *Mathematical Biology I. An Introduction* / J.D. Murray. – Springer, New York, 2001. – 576 p.
- [9] Фомин, С.В. Математические проблемы биологии / С.В. Фомин. – М.: Наука, 1973. – 200 с.
- [10] Базыкин, А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 367 с.
- [12] Шмидт, А.В. Точные решения систем уравнений типа «реакция-диффузия» / А.В. Шмидт // *Вычислительные технологии*. – 1998. – Т. 3, №4. – С. 87-94.
- [13] Шмидт, А.В. Анализ систем реакция-диффузия / А.В. Шмидт // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2007. – Т. 47, №2. – С. 256-268.
- [14] Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 368 с.

The investigation of stability in a model of the spread of viruses

Ju.G. Ermoshkina¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. In this paper we investigate the stability of the manifold of steady states in the model of the spread of viruses. The model is a system of semilinear parabolic equations with a manifold of equilibrium states. The conditions of stability and stabilizability of this manifold are obtained in this paper.

Keywords: stability, parabolic equation, equilibrium states, the model of the spread of viruses.