

Исследование точности восстановления сигнала на фоне шума методом максимума правдоподобия при двухпараметрическом анализе райсовских данных

Т.В. Яковлева

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Москва, Россия
tan-ya@bk.ru

Аннотация—В работе исследуется точность расчета величины сигнала, формирующего магнитно-резонансное или ультразвуковое изображение и восстанавливаемого на фоне шума методом максимума правдоподобия при двухпараметрическом анализе райсовских данных, в сопоставлении с максимально достижимой точностью, определяемой величиной нижней границы для стандартного отклонения оценки искомого параметра, в зависимости от параметров задачи, таких как отношение сигнала к шуму и длина выборки измерений. Рассматриваются теоретические аспекты решаемой задачи и представлены результаты численного расчета стандартного отклонения искомого параметра в сопоставлении с теоретическим минимумом этой величины, определяемым неравенством Рао-Крамера. Результаты проведенных численных экспериментов показали, что стандартное отклонение сигнала, восстановленного методом максимума правдоподобия, лишь незначительно превосходит его теоретическую нижнюю границу, что подтверждает высокую эффективность двухпараметрического анализа данных в условиях распределения Райса.

Ключевые слова— *распределение Райса, метод максимума правдоподобия, стандартное отклонение.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективность обработки стохастических сигналов существенно зависит от особенностей статистического распределения анализируемых данных. Отмечаемый в последние годы интерес к изучению статистического распределения Райса объясняется тем, что данное распределение адекватно описывает широкий круг задач, в которых выходной сигнал формируется как сумма искомого исходного сигнала и гауссовского шума, а анализируемой величиной является амплитуда результирующего сигнала, [1-4]. В частности, распределению Райса подчиняются данные, формирующие магнитно-резонансное и ультразвуковое изображения. Для анализа изображений в рамках модели Райса были разработаны так-называемые методы двухпараметрического анализа, обеспечивающие совместный расчет информативной и шумовой составляющих сигнала [5, 6].

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И ЧИСЛЕННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ РАЙСОВСКИХ ДАННЫХ

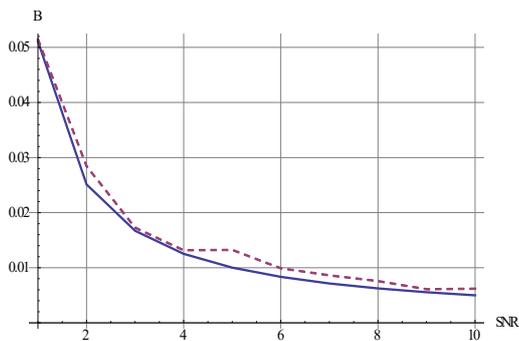
Теоретические исследования в области анализа стохастических данных [5-8], доказали возможность эффективного решения задач совместного расчета сигнала и шума в условиях применимости статистической модели Райса посредством применения методов двухпараметрического анализа, суть которых сводится к расчету параметров распределения Райса на основе данных выборочных измерений, чем обеспечивается математическое разделение полезной, информативной составляющей сигнала и его шумовой компоненты.

Настоящая работа направлена на изучение точности восстановления сигнала на фоне шума и сопоставление ее с максимально достижимой точностью, определяемой величиной нижней границы для дисперсии оценки неизвестного параметра на основе неравенства Рао-Крамера.

Метод максимума правдоподобия для расчета величины полезного сигнала состоит в решении следующей системы уравнений для параметров сигнала ν и шума σ^2 [5]:

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot I_1(x_i \cdot \nu / \sigma^2) / I_0(x_i \cdot \nu / \sigma^2) \\ \sigma^2 = (\langle x^2 \rangle - \nu^2) / 2. \end{cases} \quad (1)$$

где $I_\delta(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода порядка δ , x_i - i -я выборка сигнала. Параметр ν соответствует исходной, не искаженной величине сигнала, а σ^2 - дисперсия шума. Как показали результаты численных экспериментов, при расчете сигнала методом максимума правдоподобия величина стандартного отклонения параметра $S = \nu^2$ лишь незначительно превосходит его нижнюю границу, что иллюстрируется Рисунком 1.



Полученная в результате численного эксперимента кривая стандартного отклонения оцениваемого параметра S (пунктирная линия) и нижняя граница стандартного отклонения этого параметра (сплошная линия) в зависимости от отношения сигнала к шуму

На Рис. 1 представлены кривые, отображающие численно рассчитанную величину стандартного отклонения B_{calc} оцениваемого параметра $P = \nu^2$ в сравнении с нижней теоретической границей данной величины B_{RC} , определяемой неравенством Рао-Крамера, в зависимости от отношения сигнала к шуму. При этом стандартное отклонение B_{calc} параметра P рассчитывается на основе решения системы (1) уравнений максимума правдоподобия для параметров сигнала ν и шума σ^2 .

Таким образом, результаты проведенного численного эксперимента демонстрируют следующее: метод максимума правдоподобия при двухпараметрическом анализе райсовских данных обеспечивает достаточно высокую точность оценивания полезной, информативной составляющей сигнала ν , такую, что величина стандартного отклонения B_{calc} параметра $P = \nu^2$ превосходит свой предельно достижимый теоретический уровень B_{RC} очень незначительно.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучается точность восстановления сигнала на фоне шума методом максимума правдоподобия при двухпараметрическом анализе райсовских данных в сопоставлении с ее предельно достижимым значением,

определяемым на основе неравенства Рао-Крамера. Представлены теоретические аспекты решаемой задачи, а также результаты ее численного решения.

Полученные в ходе численных экспериментов результаты подтверждают возможность достижения высокой точности при восстановлении искомой информативной составляющей сигнала на фоне шума рассматриваемым методом максимума правдоподобия, что весьма важно для решения проблем обработки изображений в системах магнитно-резонансной и ультразвуковой визуализации.

Результаты демонстрируют, что метод максимума правдоподобия при двухпараметрическом анализе райсовских данных обеспечивает точность, практически совпадающую с ее максимально достижимым теоретическим пределом в широком диапазоне значений отношения сигнала к шуму.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rice, S.O. Mathematical analysis of random noise / S.O. Rice // Bell Syst. Technological J. – 1944. – Vol. 23. – P. 282.
- [2] Benedict, T.R. The joint estimation of signal and noise from the sum envelope / T.R. Benedict, T.T. Soong // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1967. – Vol. IT-13(3). – P. 447-454.
- [3] Talukdar, K.K. Estimation of the parameters of Rice distribution / K.K. Talukdar, W.D. Lawing // J. Acoust. Soc. Amer. – 1991. – Vol. 89(3). – P. 1193-1197.
- [4] Sijbers, J. Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters / J. Sijbers, A.J. den Dekker, P. Scheunders, D. Van Dyck // IEEE Transactions on Medical Imaging. – 1998. – Vol. 17(3). – P. 357-361.
- [5] Yakovleva, T.V. Methods of Mathematical Statistics in Two-Parameter Analysis of Rician Signals / T.V. Yakovleva, N.S. Kulberg // Doklady Mathematics. – 2014. – Vol. 90(3). – P. 1-5. DOI: 10.1134/S1064562414070060.
- [6] Яковлева, Т.В. Условия применимости статистической модели Райса и расчет параметров Райсовского сигнала методом максимума правдоподобия / Т.В. Яковлева // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 13-25. DOI: 10.20537/2076-7633-2014-6-1-13-25.
- [7] Яковлева, Т.В. Теоретическое обоснование методов математической статистики для оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных / Т.В. Яковлева // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 445-473. DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-3-445-473.
- [8] Yakovleva, T. Peculiarities of the Rice Statistical Distribution: Mathematical Substantiation/ T. Yakovleva // Applied and Computational Mathematics, Science Publishing Group. – 2018. – Vol. 7(4). – P. 188-196. DOI: 10.11648/j.acm.20180704.12.