

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СМЕСИ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А.Ю. Денисова, К.А. Кравченко, В.В. Сергеев

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет), Самара, Россия

В работе исследован алгоритм Statistical Histogram based Expectation-Maximization (SHEM) для оценки параметров смеси многомерных распределений. Для реализации алгоритма предложен метод хранения и построения гистограммы с использованием иерархической структуры данных – дерево, что позволяет сократить объём данных, используемых для хранения многомерной гистограммы. В работе рассматривается применение данной структуры данных для реализации указанного алгоритма в задаче сегментации изображений, а также предложен механизм организации работы алгоритма в случае неизвестного числа компонент смеси. Входные изображения предполагаются удовлетворяющими модели смеси гауссовых распределений.

Ключевые слова: SHEM-алгоритм, сегментация изображений, смесь вероятностных распределений, многомерные гистограммы.

Введение

Задача сегментации изображений является одним из основных этапов интерпретации и анализа изображений и предполагает разбиение изображения на множество областей с некоторыми характеристиками однородности. Существуют различные подходы к определению понятия «однородности» выделяемых областей на изображении, рассматривающие текстурные признаки областей, геометрические характеристики и т.п.

При отсутствии априорных сведений об изображении и объектах на нём целесообразно использовать поэлементную классификацию каждого его пикселя, что соответствует использованию в качестве характеристики «однородности» яркости пикселя изображения. Известные методы сегментации, реализующие такой подход, основаны на представлении изображений в виде смеси распределений, например, алгоритм EM (Expectation-maximization) [1]. Данный алгоритм при известном числе компонент смеси позволяет оценить параметры распределений и вклад каждой компоненты в смесь. Последующая сегментация производится с учётом максимальной апостериорной вероятности принадлежности пикселя конкретному распределению.

При применении EM-алгоритма к задачам обработки изображений возникает ряд проблем. К таковым относятся: медленная сходимость алгоритма и длительные вычисления. Поэтому в данной работе рассматривается SHEM алгоритм [2], отличающийся использованием ненормированной гистограммы, полученной из исходной выборки.

В работе приведено описание алгоритма SHEM и предложен алгоритм представления гистограммы изображения использованием деревьев. В разделе экспериментов представлены примеры работы метода сегментации на основе метода SHEM с предложенной структурой данных.

Задача разделения смеси распределений

Пусть имеется выборка $\{x_1, \dots, x_N\}$, $x_i \in R^M$, значений некоторой случайной величины X . Модель смеси распределений предполагает, что плотность вероятностей данной случайной величины может быть представлена в виде:

$$f_{\theta}^X(x) = \sum_{i=1}^k p_i \psi_i(x; t_i), \quad (1)$$

где $k \geq 1$ – количество компонент смеси, ψ_1, \dots, ψ_k – плотности вероятностей компонент смеси, $\theta = (p_1, \dots, p_k, t_1, \dots, t_k)$ – вектор параметров модели, включающий в себя веса каждой из компонент $p_i \in [0, 1]$, $\sum_{k=1}^K p_i = 1$ и вектора параметров распределений t_i . Весовые коэффициенты модели интерпретируются как вероятности реализации значения соответствующей компоненты смеси.

Задача разделения смеси распределений состоит в оценке вектора параметров модели $\theta = (p_1, \dots, p_k, t_1, \dots, t_k)$ по известной реализации случайной величины X .

В настоящей работе будем рассматривать в качестве случайной величины X значение многокомпонентного пикселя, представляющего собой дискретный случайный вектор.

Алгоритм SHEM

Алгоритм SHEM основан на использовании гистограммы для оценки параметров смеси распределений. Под гистограммой будем понимать функцию $His(l)$ равную количеству элементов исходной выборки, соответствующих значению l :

$$His(l) = \sum_{i=1}^N \delta(x_i - l), \quad l \in L \quad (2)$$

где δ - символ Кронекера, $L = \{l_1, \dots, l_n\}$, N - общее число элементов выборки.

Оценка параметров распределения производится итерационно в два этапа:

1) оценка апостериорной вероятности принадлежности каждого значения выборки $g_{ij}^{(m)}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$ конкретному распределению и априорной вероятности распределений $p_i^{(m)}$, $i = \overline{1, k}$:

$$g_{ij}^{(m)} = \frac{p_i^{[m]} \psi_i(j, \theta_i^{[m]})}{\sum_{k=1}^n p_k^{[m]} \psi_k(j, \theta_k^{[m]})}, \quad (3)$$

$$p_i^{(m+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=l_{\min}}^{l_{\max}} g_{ij}^{(m)} His(j). \quad (4)$$

2) оценка параметров распределений согласно правилу максимального правдоподобия.

В случае нормального распределения всех компонент смеси плотность вероятностей каждой компоненты имеет вид:

$$\psi_i(x, t_i) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (x - \mu_i)}{2}\right)$$

где μ_i – математическое ожидание, а Σ_i – ковариационная матрица, $i = 1, \dots, k$. Тогда оценки параметров распределений в алгоритме SHEM могут быть найдены следующим образом:

$$\bar{\mu}_i^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=l_{\min}}^{l_{\max}} g_{ij}^{(m)} j \text{His}(j)}{\sum_{j=l_{\min}}^{l_{\max}} g_{ij}^{(m)} \text{His}(j)}, \quad (5)$$

$$\Sigma_i^{[m+1]} = \frac{\sum_{j=l_{\min}}^{l_{\max}} g_{ij}^{(m)} \text{His}(j) (x_j - \mu_i^{(m+1)}) (x_j - \mu_i^{(m+1)})^T}{\sum_{j=l_{\min}}^{l_{\max}} g_{ij}^{(m)} \text{His}(j)}$$

Структура данных для хранения гистограммы

Для эффективного построения и хранения гистограммы изображения с последующим применением ее в алгоритме SHEM предлагается использовать следующий подход.

Пусть каждый пиксель представляется в виде $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{iM})$, где $x_{is} \in [0, 2^b - 1]$, $i = 1, N, s = 1, M$. Каждый из узлов дерева, за исключением терминальных, имеет 2^M потомков.

Каждый уровень дерева соответствует представлению вектора x_i в определённой битовой плоскости. А именно, номер потомка $q^{(r)}$ (далее маска узла), к которому будет отнесён текущий пиксель на данном уровне иерархии $0 \leq r \leq b$, формируется как число в двоичной системе счисления, составленное последовательно из значений r -ых бит в каждом канале изображения. При этом каждый узел дерева на уровне r хранит число пикселей, для которых первые r бит в каждом канале определяются масками узлов $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r)}$, составляющими путь к текущему узлу. Количество бит для представления значения в каждом канале конечно и равно b и составляет максимальную глубину дерева. Терминальные узлы соответствуют конкретным значениям пикселя, а путь к терминальному узлу полностью определяет его значение. Корневой узел соответствует глубине дерева $r = 0$ и содержит количество всех точек на изображении.

Таким образом, используя такую структуру данных можно построить гистограмму изображения, последовательно анализируя каждый пиксель изображения. Достоинством такого подхода является более высокая скорость построения гистограммы за счёт использования бинарных операций сдвига для определения номера потомка и отсутствие избыточности в построенной гистограмме, так как в результат входят только ненулевые для данного изображения столбцы гистограммы.

Например, для случая, когда изображение представлено в цветовой схеме RGB с 8 битами в каждом канале ($M = 3$, $x_{is} \in [0, 255]$, $i = 1, N, s = 1, M$) мы получим окто-дерево глубины 8 с номерами ветвей от 0 до 7. На первом уровне в нулевой ветви будут сосредоточены значения пикселей имеющие в каждом канале значения от 0 до 127, в первой ветви значения от 0 до 127 в красном и зелёном каналах и от 128 до 255 в синем канале и т.д. Схематически структура данных для данного случая представлена на рис. 1. Для использования в алгоритме следует извлечь последовательность терминальных узлов построенного дерева.

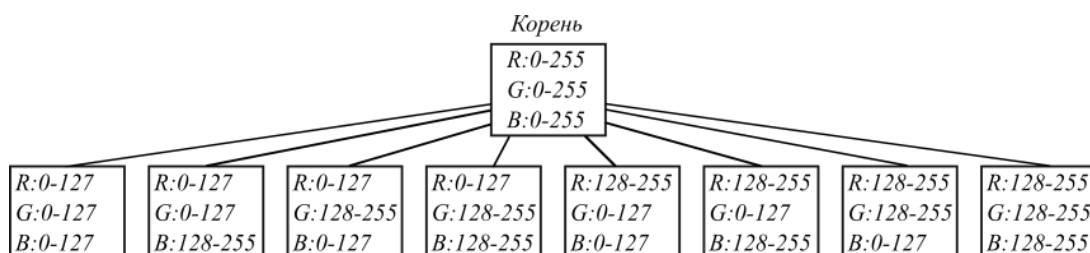


Рис. 1. Первый уровень структуры данных для хранения гистограммы изображения для RGB случая

Экспериментальные исследования

Для демонстрации результата работы алгоритма SHEM использовалось тестовое изображение, представленное на рис. 2. На рис. 3 показаны результаты работы алгоритма при изначальном предположении, что в смеси: а) 5 распределений; б) 8 распределений. Представленные изображения были сформированы путём замены пикселей значениями оценок математического ожидания компоненты смеси, имевшей максимальную апостериорную вероятность для заданного пикселя.



Рис.2. Исходное тестовое изображение

Алгоритм SHEM предполагает известное количество компонент смеси, что существенно ограничивает сферу его применения. Для преодоления этого ограничения предлагается использовать смесь распределений с заведомо избыточным количеством компонент с последующим слиянием тех из них, для которых пересечение плотностей вероятностей превосходит заданную величину.

В качестве дополнительной величины, определяющей необходимость слияния компонент можно использовать расстояние Бхаттачария между распределениями [3], чем оно меньше, тем более близки распределения друг к другу.

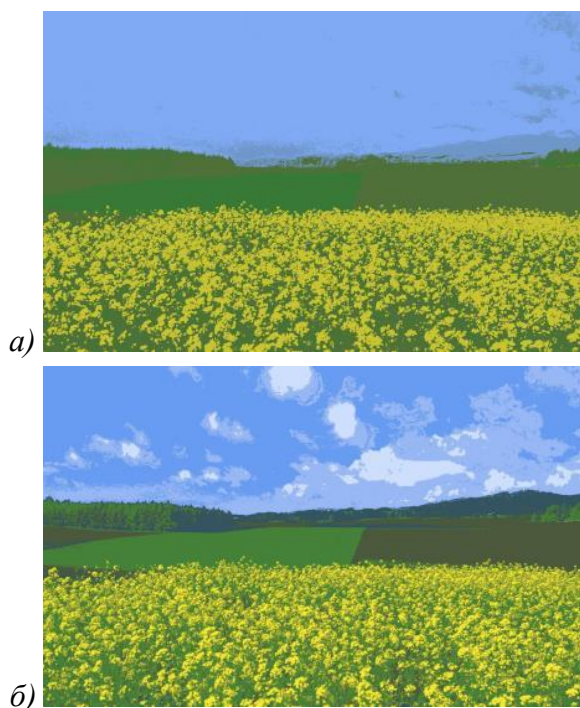


Рис.3. Результат работы SHEM-алгоритма при предположении о наличии в смеси а) 5 распределений; б) 8 распределений

Для тестового изображения, представленного на рис. 2 значения минимального расстояния Бхаттачария между парами распределений при различном количестве компонент смеси представлено в таблице 1. Из таблицы 1 видно, что при уменьшении предполагаемого количества распределений, расстояние Бхаттачария увеличивается. Назначив порог для данной величины можно произвести автоматическое сокращение количества компонент смеси распределений.

Таблица 1. Минимальное расстояние Бхаттачария при различных предположениях о количестве распределений в смеси для рис. 2.

Количество ний	распреде-	Минимальное расстояние Бхатта-
	лений	чария
3		3.1161
4		1.3727
5		1.4773
6		1.2947
7		1.0207
8		1.0451
9		0.9377
10		1.0954

Заключение

Приведенные исследования показывают возможность оптимизации стандартного EM-алгоритма, с целью улучшения его работы над изображениями: использование модификации, основанной на гистограммах, хранение данных об изображении в структуре дан-

ных, называемой деревом, расчет расстояния Бхаттачария для выявления наиболее подходящего количества распределений в смеси.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке стипендии Президента РФ молодым учёным и аспирантам № СП-3322.2016.5 «Исследование методов формирования и использования многомерных гистограмм в задачах кластеризации мультиспектральных космических изображений».

Литература

1. В. Ю. Королев. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. М.: Техносфера, 2008. 390 с.
2. Ghobad Moradi, Mousa Shamsi, Mohammad H. Sedaaghi , Setareh Moradi. Using Statistical Histogram Based EM Algorithm for Apple Defect Detection. American Journal of Signal Processing 2012, 2(2): p. 10-14.
3. Bhattacharyya, A. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 35: p. 99–109.