Использование вероятностных статистик для определения параметров дважды стохастических моделей на базе авторегрессий с кратными корнями

К.К. Васильев[1], В.Е. Дементьев[1], Н.А. Андриянов[1,2]

[1]Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027
[2]Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Можайского 8/8, Ульяновск, Россия, 432071

Аннотация. Важной задачей при описании изображений с помощью математических моделей является идентификация параметров по имеющемуся изображению. Особую сложность такая задача имеет для комбинированных математических моделей, позволяющих в том числе описывать многомерные пространственно неоднородные сигналы. Примером такой модели является дважды стохастическая модель на базе авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений, которая обладает важным свойством квазиизотропности и позволяет описывать плавное изменение статистических и корреляционных свойств имитируемых изображений. Данная работа направлена на разработку алгоритмов идентификации параметров указанной модели по оцениваемым вероятностным свойствам имеющегося изображения.

1. Введение

Одной из важных задач, возникающих при обработке изображений, является задача описания этих изображений с помощью формальных математических моделей [1-7]. При этом такая модель должна быть достаточно простой, чтобы формировать на своей основе эффективные алгоритмы обработки, а с другой стороны, эта же математическая модель должна адекватно описывать свойства реальных изображений. Среди наиболее сложных для описания свойств реальных сигналов особое место занимает их пространственная неоднородность. Один из вариантов имитации такой неоднородности связан с использованием дважды стохастических (ДС) моделей [4-5]. Параметры этих моделей сами являются реализациями вспомогательных случайных полей (СП), что позволяет задавать динамику изменения статистических и корреляционных свойств имитируемого сигнала. К сожалению, ДС модели, основанные на каузальных или некаузальных конструкциях общего вида, содержат значительное количество параметров, взаимосвязь между которыми описывается весьма сложными стохастическими соотношениями. Поэтому идентификация этих параметров по реальному сигналу в общем виде связана с почти непреодолимыми сложностями. Однако в работе [6] показано, что в значительном числе случаев для описания многомерных сигналов возможно использовать относительно простые ДС модели, основанные на комбинациях авторегрессионных (АР) моделей с кратными корнями характеристических уравнений. В настоящей работе рассматриваются вопросы идентификации параметров таких моделей.

2. Дважды стохастическая модель на базе АР с кратными корнями

Предположим, что двумерное изображение описывается следующей ДС моделью:

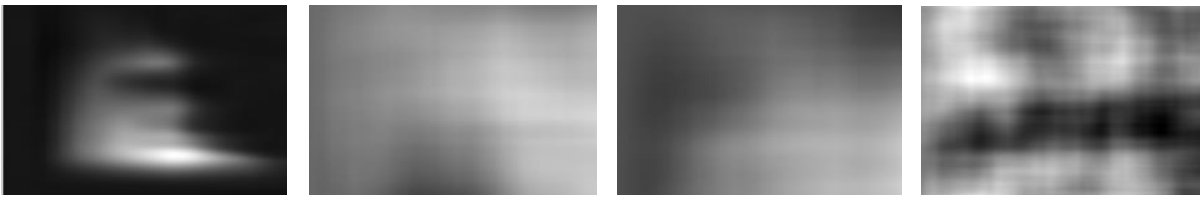
$$x_{i,j} = A + a_{i,j} + y_{i,j} = A + a_{i,j} + F_{ARMR(K_1,K_2)}[P_1 + \rho_{1i,j}, P_2 + \rho_{2i,j}, (B + b_{i,j})\beta_{i,j}\xi_{i,j}], \qquad (1)$$

где A, P_1, P_2, B – некоторые числа, характеризующие среднее математическое ожидание, корреляционные свойства и дисперсию изображения; $F_{ARMR(K_1,K_2)}(\rho_1, \rho_2, b)$ – преобразование, соответствующее двумерной АР модели с кратными корнями (модель АРКК):

$$(1 - \rho_1 z_1^{-1})^{K_1} (1 - \rho_2 z_2^{-1})^{K_2} x_{i,j} = b\beta\xi_{i,j}, \qquad (2)$$

где K_1, K_2 – коэффициенты, определяющие кратность модели; β – нормирующий коэффициент; z_k^{-1} – оператор сдвига $z_1^{-l_1} z_2^{-l_2} x_{i,j} = x_{i-l_1, j-l_2}$; $a_{i,j} = F_{ARMR(K_{a1},K_{a2})}(r_{a1}, r_{a2}, \gamma_a \xi_{ai,j})$; $\rho_{1ij} = F_{ARMR(K_{1\rho1},K_{2\rho1})}(r_{11}, r_{12}, \gamma_1, \xi_{1i,j})$; $\rho_{2ij} = F_{ARMR(K_{1\rho2},K_{2\rho2})}(r_{21}, r_{22}, \gamma_2, \xi_{2i,j})$; $b_{ij} = F_{ARMR(K_{D1},K_{D2})}(r_{\beta1}, r_{\beta2}, \gamma_\beta, \xi_{\beta i,j})$ – случайные величины, определяемые моделью АРКК; $\xi_{i,j}, \xi_{ai,j}, \xi_{1i,j}, \xi_{2i,j}, \xi_{\beta i,j}$ – гауссовские белые СП.

Модель (1) – (2) допускает возможность изменения математического ожидания, дисперсии и корреляционных свойств имитируемых сигналов в зависимости от текущих пространственных координат. Это дает возможность применения ДС модели при имитации и обработке широкого класса многомерных реальных сигналов [6]. В качестве иллюстрации на рисунке 1 (а) представлена одна из возможных реализаций ДС модели. При этом изображение на рисунке 1 (б) соответствует СП $\{a_{i,j}\}$, рисунок 1 (в) отображает поле $\{b_{i,j}\}$, а рисунок 1 (г) представляет поле корреляционных параметров $\{\rho_{1i,j}\}$.



а) б) в) г)

Рисунок 1. Реализации ДС модели при разных значениях параметра.

Анализ представленных изображений показывает, что за счет изменения вероятностных характеристик АРКК можно формировать различные неоднородные изображения.

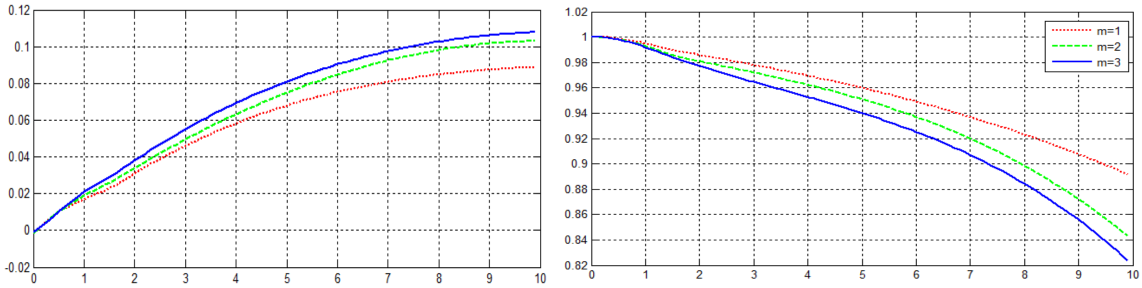
3. Оценивание параметров ДС модели

Решим задачу, связанную с оценкой неизвестных параметров A, P_1, P_2, B, K_1, K_2, $K_{a1}, K_{a2}, K_{1\rho_1} K_{2\rho_1}, K_{1\rho_2}, K_{2\rho_2}, K_{D1}, K_{D2}, r_{a1}, r_{a2}, \gamma_a, r_{11}, r_{12}, \gamma_1, r_{21}, r_{22}, \gamma_2, r_{\beta1}, r_{\beta2}, \gamma_\beta$ по имеющимся наблюдениям $\{z_{i,j}; i = 1..M_1, j = 1..M_2\}$. Для этого рассмотрим вначале задачу идентификации параметров обычной двумерной модели АРКК с постоянными параметрами:

$$x_{i,j} = F_{ARMR(K_1,K_2)}(r_1, r_2, \sigma_x^2 \beta\xi_{i,j}). \qquad (3)$$

Качество идентификации при этом будем оценивать, исходя из близости разделимой корреляционной функции (КФ) модели (3) $B_{ARMR\hat{m}_1\hat{r}_1}(i, j)$ и КФ исходного изображения $B_x(i, j)$. Саму подгонку будем осуществлять на основе псевдоградиентного (ПГ) алгоритма [8], минимизируя по L_2-норме разницу между $\hat{B}_{ARMR\hat{m}_1\hat{r}_1}(i, j)$ и $\hat{B}_x(i, j)$. Тогда задача сводится к поиску оценок $\hat{m}_1, \hat{r}_1, \hat{m}_2, \hat{r}_2$ обеспечивающих $\min\limits_{\hat{m}_1,\hat{r}_1} \sum_{i=1}^{r_k} [\hat{B}_{xARMR_{\hat{m}_1\hat{r}_1}}(i) - \hat{B}_x(i)]^2$ и

$\min_{\hat{m}_2,\hat{r}_2}\sum_{i=1}^{r_k}[\hat{B}_{yARMR_{\hat{m}_1\hat{r}_1}}(j)-\hat{B}_y(j)]^2$. На рисунке 2 (а) показана зависимость точности идентификации корреляционного параметра $\hat{r}$ от σ_x^2, а на рисунке 2 (б) показана зависимость вероятности правильного определения кратности m от σ_x^2.



а) б)

Рисунок 2. Исследование точности идентификации параметров.

Пусть реализация $\{a_{i,j}\}$ является существенно более гладкой, чем $\{x_{i,j}\}$, тогда в пределах каузального окна СП $\{x_{i,j}\}$ математическое ожидание можно считать постоянным. Также будем считать, что статистические и корреляционные свойства ДС модели меняются с настолько медленной скоростью, что имеют место следующие соотношения: $B_{a1}(k_1)+B_{Y1}(k_1)\approx B_{z_1}(k_1)$, $B_{a2}(k_2)+B_{Y2}(k_2)\approx B_{z_2}(k_2)$. При этом значения КФ $B_{a1}(k_1=|i_1-i_2|)$ и $B_{a2}(k_2=|j_1-j_2|)$ зависит только от векторного параметра $\bar{\theta}=\{\sigma_a^2,\rho_{1a},M_{1a},\rho_{2a},M_{2a}\}$. Чтобы определить неизвестный вектор $\hat{\bar{\theta}}$ введем функции:

$$F_1(\sigma_a^2,\rho_{1a},M_{1a})=\sum_{i=1}^{M_1}\left[\sum_{j_1=1}^{M_1}\sum_{j_2=1}^{M_2}z_{i,j_1}\left(B^{-1}_{z_1j_1j_2}-B^{-1}_{a_1j_1j_2}(\bar{\theta})\right)z_{i,j_2}\right],F_2(\sigma_a^2,\rho_{2a},M_{2a})=\sum_{j=1}^{M_2}\left[\sum_{i_1=1}^{M_1}\sum_{i_2=1}^{M_2}z_{i_1,j}\left(B^{-1}_{z_2i_1i_2}-B^{-1}_{a_1i_1i_2}(\bar{\theta})\right)z_{i_2,j}\right],\quad(4)$$

где B_{Z_1} – диагональная матрица $M_2\times M_2$, составленная из оценок КФ СП $\{z_{i,j}\}$ по строкам: $B_{z_1j_1j_2}=\hat{B}_{z_1}(|j_1-j_2|)$; B_{z_2} – диагональная матрица $M_1\times M_1$, составленная из оценок КФ СП $\{z_{i,j}\}$ по столбцам: $B_{z_2i_1i_2}=\hat{B}_{z_2}(|i_1-i_2|)$.

Можно показать, что чем ближе будут $B_{a_1j_1j_2}(\hat{\bar{\theta}})$ и $B_{a_2i_1i_2}(\hat{\bar{\theta}})$ к их истинным значениям, тем большие значения будут принимать выражения (4).

Для определения вектора параметров $\bar{\theta}$, обеспечивающих максимум $F(\bar{\theta})=F_1(\sigma_a^2,\rho_{1a},M_{1a})+F_2(\sigma_a^2,\rho_{2a},M_{2a})$ также можно использовать ПГ процедуры. При этом разумно использовать следующие ограничения: $M_{1a},M_{2a}\in[1,2,3,4]$, $\sigma_a^2\le\hat{B}$, $\rho_{1a},\rho_{2a}\in[-1,1]$ либо иные априорные сведения об оцениваемых параметрах.

Рассмотрим теперь возможности определения параметров внутренних СП. Для этого будем последовательно рассматривать каузальные области $D_{i,j}$ для каждого элемента (i,j) оцениваемого изображения. В случае, если модель (1) справедлива, тогда

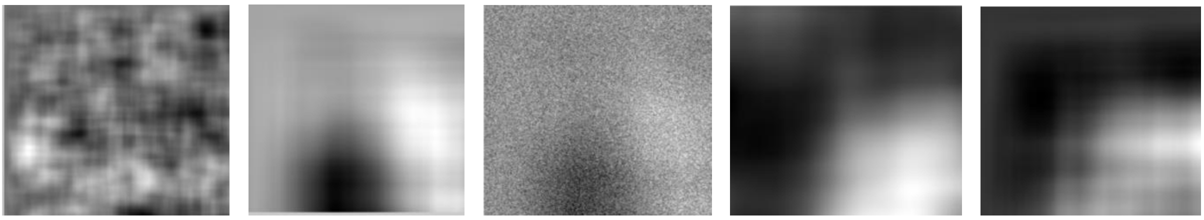
$$M\{z_{i,j}\}=M\{F_{ARMR(M_1,M_2)}[P_1+\rho_{1i,j},P_1+\rho_{2i,j},(B+b_{i,j})\beta_{i,j}\xi_{i,j}]\}=M\{P_1+\rho_{1i,j},P_1+\rho_{2i,j},0]\}.\quad(5)$$

Введем ограничение $\hat{\rho}_{1i,j}=\hat{\rho}_{2i,j}$ и определим следующую функцию

$$\varphi(\hat{\rho}_{1i,j})=F_{ARMR(M_1,M_2)}(P_1+\hat{\rho}_{1i,j},P_2+\hat{\rho}_{1i,j},0)-z_{i,j}.\quad(6)$$

Найдем корни $\varphi(\hat{\rho}_{1i,j})$. Для этого можно использовать классический численный метод касательных: $\hat{\rho}_{1i,j_k}=\hat{\rho}_{1i,j_{k-1}}-\varphi(\hat{\rho}_{1i,j_k-1})/\phi'(\hat{\rho}_{1i,j_k-1})$. При этом в качестве начального приближения для каждого $\hat{\rho}_{1i,j}$ будем использовать ранее полученную оценку $\hat{\rho}_{1i-1,j}$. Это можно обосновать ожидаемым медленным изменением вспомогательных СП, определяющих динамику изменения корреляционных свойств. Для отсчетов с $i=1$ положим $\hat{\rho}_{1i,j_0}=0$. Совокупности отсчетов $\{\hat{\rho}_{1i,j}\}$ и $\{\hat{\rho}_{2i,j}\}$ являются оценками вспомогательных СП в модели (1). Рассмотрим теперь СП, элементами которого являются отсчеты вида $\hat{b}_{i,j}=(z_{i,j}-\hat{A})^2-\hat{B}-\hat{\sigma}_a^2, i=1..L_1, j=1..L_2$. Нетрудно заметить, что эти отсчеты являются точечными оценками СП, определяющего дисперсии $b_{i,j}$. Считая, что все эти СП порождены моделью АРКК, выполним оценку кратностей и корреляционных параметров $\{\hat{b}_{i,j}\},\{\hat{\rho}_{1i,j}\}$ и $\{\hat{\rho}_{2i,j}\}$ по критерию близости корреляционных характеристик, описанному выше.

На рисунке 3 представлена иллюстрация предлагаемой методики. При этом рисунок 3 (а) содержит сымитированное с помощью ДС модели (2) изображение $(M_1=M_2=2; P_1=P_2=0.9)$; на рисунке 3 (б) и 3 (в) представлены изображения, соответствующие истинному СП корреляционных параметров $\{\rho_{1i,j}\}$ и СП оценок $\{\hat{\rho}_{1i,j}\}$; на рисунке 3 (г) и 3 (д) изображено СП $\{b_{i,j}\}$ и СП оценок $\{\hat{b}_{i,j}\}$ после сглаживания.



а) б) в) г) д)

Рисунок 3. Иллюстрация работы методики оценивания параметров.

Обратим внимание на то, что рисунок 3 (в) содержит дополнительный шум относительно рисунка 3 (б). Оценка дисперсии этого шума не представляет особых сложностей. Однако его наличие приводит к определенным погрешностям при получении оценок $\hat{r}_{11},\hat{r}_{12}$, определяющих динамику изменения корреляционных свойств изображения. На рисунке 4 представлены зависимости этих погрешностей от дисперсий σ_x^2 и σ_r^2 основного и вспомогательных полей.

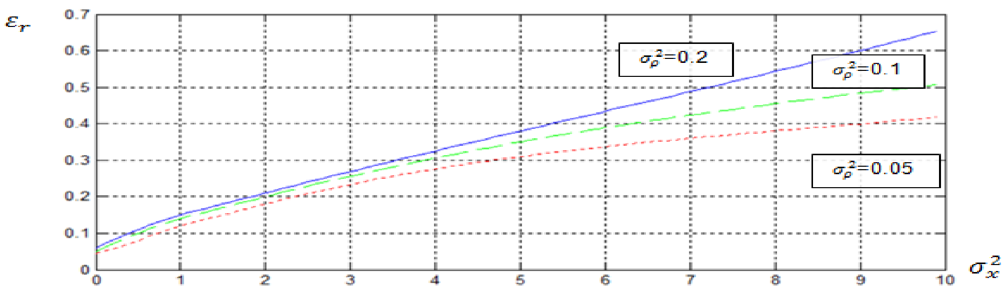


Рисунок 4. Зависимость погрешности оценивания параметра r_{11} ДС модели от дисперсий основного и вспомогательных полей.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложена методика оценивания параметров ДС модели на основе комбинации классических численных методов и ПГ алгоритмов. В работе подробно рассмотрен метод оценивания параметров, базирующийся на алгоритме ПГ поиска. Для различных параметров моделей получены зависимости точности оценки от дисперсии СП. Результаты анализа этих ошибок свидетельствуют о потенциальной возможности определения параметров ДС для произвольных двумерных изображений.

5. Литература

[1] Woods, J.W. Image Estimation Using Doubly Stochastic Gaussian Random Field Models / J.W. Woods, S. Dravida, R. Mediavilla // Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1987. – Vol. 9(2). – P. 245-253.
[2] Баврина, А.Ю. Моделирование видеоинформационного тракта оптико-электронных систем дистанционного зондирования земли: решения, проблемы и задачи / А.Ю. Баврина, В.В. Мясников, В.В. Сергеев, Е.В. Трещёва, Н.В. Чупшев // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 4. – С. 572-585.
[3] Денисова, А.Ю. Идентификация линейной модели наблюдения изображений, получаемых при дистанционном зондировании Земли, с использованием геоинформационных данных / А.Ю. Денисова, В.В. Сергеев // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 557-563. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-557-563.
[4] Васильев, К.К. Представление и обработка спутниковых многозональных изображений / К.К. Васильев, В.Е. Дементьев. – Ульяновск, 2017. – 247 с.
[5] Vasiliev, K. Representation and processing of multispectral satellite images and sequences / K. Vasiliev, V. Dementiev, N. Andriyanov // Procedia Computer Science. – 2018. – Vol. 126. – P. 49-58.
[6] Vasil'ev, K.K. Doubly stochastic models of images / K.K. Vasil'ev, V.E. Dement'ev, N.A. Andriyanov // Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). – 2015. – Vol. 25(1). – P. 105-110.
[7] Vasiliev, K. Synthesis and analysis of doubly stochastic models of images / K.K. Vasiliev, N.A. Andriyanov // CEUR Workshop Proceedings. "Proceedings of the 2nd International Workshop on Radio Electronics and Information Technologies", 2017. – P. 145-154.
[8] Ташлинский, А.Г. Оценивание параметров пространственных деформаций последовательностей изображений. – Ульяновск: УлГТУ, 2000. – 132 с.

Благодарности

Результаты получены при поддержке гранта РФФИ и Правительства Ульяновской области №16-41-732027 и Гранта РФФИ №17-01-00179.

Using probabilistic statistics to determine the parameters of doubly stochastic models based on autoregression with multiple roots

K.K. Vasiliev[1], V.E. Dementiev[1], N.A. Andriyanov[1,2]

[1]Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027
[2]Ulyanovsk Institute of Civil Aviation, Mozhaiskogo street 8/8, Ulyanovsk, Russia, 432071

Abstract. An important task in describing images using mathematical models is the identification of parameters from an existing image. Such a task is of particular difficulty for combined mathematical models, which allow, among other things, to describe multidimensional spatially inhomogeneous signals. An example of such a model is a double-stochastic model based on autoregression with multiple roots of characteristic equations, which has an important property of quasi-isotropy and allows one to describe a smooth change in the statistical and correlation properties of simulated images. This work is aimed at developing algorithms for identifying the parameters of this model based on the estimated probabilistic properties of the available image.