

Идентификация измерителя состояния (канала передачи данных) для случая стохастических и параметрически неопределенных сред

И.В. Семушин¹, Ю.В. Цыганова¹

¹Ульяновский государственный университет, Л. Толстого 42, Ульяновск, Россия, 432017

Аннотация. Проводится анализ задач идентификации измерений в стохастических и неопределенных условиях, приближенных к реальности, в системах управления или связи. Примером ситуации, когда такая задача возникает в системах связи, является запрос на информацию о состоянии канала (ИСК). ИСК критически важна по многим причинам. Среди прочих случаев ИСК может включать специальные оценки прямых и перекрестных каналов вместе с данными об их точности, прежде чем осуществлять прекодинг передаваемых сигналов для устранения наложений каналов. Разрабатываемое решение заключается в построении адаптивного фильтра Калмана (АФК) – такого, который сходится к оптимальному фильтру Калмана (ОФК) без какого-либо смещения в оценках. Этот результат достигается построением и затем минимизацией некоторого специфического Вспомогательного Функционала Качества (ВФК). Этот ВФК должен удовлетворять двум условиям: 1) он достигает своего минимума одновременно с Исходным Функционалом Качества (ИФК), который не может быть измерен, и 2) он доступен для использования любым практическим методом оптимизации. Изложение этого так называемого активного принципа адаптации в общем уточняющем примере позволяет проследить всю процедуру решения шаг за шагом. Работу завершает экспериментальная проверка теоретических положений.

1. Введение

Проблема преодоления априорной неопределенности в задачах управления и связи имеет долгую историю, начиная с формулирования первых принципов оптимального управления. Существует большое число публикаций, относящихся к этой проблеме в журналах, трудах конференций и книгах [1]. Ее решение тесно связано с концепцией *адаптивности*.

Чтобы сделать систему адаптивной, нужно снабдить ее средствами идентификации, позволяющими достаточно точно и несмещенно оценивать параметры системы, которые заранее не известны или же могут внезапно изменяться. Новые парадигмы, важнейшие проблемы и возможности в области идентификации систем недавно обобщены [2].

Для систем управления типична ситуация, когда неопределенными являются свойства управляемого объекта или процесса, поскольку они существуют как естественная данность. В теории адаптации таких систем больший акцент делают на преодолении этой ситуации. Для средств же наблюдения (измерения) и/или регулирования более вероятна ситуация, что их параметры известны, поскольку их создают инженеры.

Однако есть ситуации инверсного типа: средства наблюдения/измерения состояния почти полностью определяются стохастическими и неопределенными свойствами естествен-

ных сред, в которых они функционируют. В этом случае возможен подход, при котором процесс на входе измерителя генерируют искусственно (с известными параметрами), чтобы с его помощью идентифицировать измеритель. Примером этому могут быть цифровые абонентские линии (Discrete Subscriber Line, DSL), повышенное качество которых может быть получено только при полной и высокоточной информации о состоянии канала. DSL-каналы в общем случае достаточно стабильны, тем не менее они могут изменяться, например, при медленных или внезапных переменах температуры и/или влажности окружающей среды. Хотя эти перемены могут быть незначительны, без адаптации алгоритмов оценивания канала не обойтись. Это абсолютно необходимо для прекодинга сообщений – метода устранения или ослабления перекрестного наложения каналов (Crosstalk elimination or mitigation) [3], [4]. Если на вход канала подавать сигналы, сгенерированные по заранее известному плану, то канал можно рассматривать как измеритель/наблюдатель этого процесса и далее его идентифицировать. Такой подход может составить полезную альтернативу существующим решениям [5]. На его разработку направлена данная работа. Она опирается на так называемый *активный принцип адаптации* (АПА), известный из обзора [6], и этим обусловлена структура работы. В разделе 2 представлен закон генерирования и приема сигналов под влиянием стохастических сред. Раздел 3 характеризует его параметрическую неопределенность. Пример, уточняющий реализацию АПА, приведен в разделе 4. Сама реализация занимает четыре шага: Шаг 1 – в разделе 5, Шаг 2 – в разделе 6, Шаг 3 – в разделе 7, Шаг 4 – в разделе 8. Подтверждение этих теоретических положений приведено в разделе 9 в форме вычислительных экспериментов. Заключительный раздел 10 обобщает результаты.

2. Стохастическая параметризованная модель источника данных

Пусть состояния объекта (передаваемые данные) представлены моделью Калмана:

$$\mathcal{D}(\theta) : \begin{cases} x_{t+1} = \Phi x_t + \Psi u_t + \Gamma w_t, & t \in \mathbb{Z}_+, \\ y_t = H x_t + v_t, & t \in \mathbb{Z}_1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\{x_t\} \in \mathbb{C}^n$, $\{y_t\} \in \mathbb{C}^m$ и $\{u_t\} \in \mathbb{R}^p$ обозначают состояние заданного объекта (передаваемые данные), результат измерения состояния (передачи данных сквозь канал связи) и входной возбуждающий сигнал, соответственно, при этом \mathbb{Z}_+ обозначает множество неотрицательных целых, \mathbb{Z}_1 – строго положительных целых, а \mathbb{Z} – множество всех целых чисел. Некоторый l -компонентный вектор $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ параметризует эту модель. Каждое значение θ на множестве Θ создает отдельную модель $\mathcal{D}(\theta)$. Матрицы Φ , Ψ , Γ и H , относящиеся к модели источника данных $\mathcal{D}(\theta)$, постоянны во времени, так что $\Phi = \Phi(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Psi = \Psi(\theta) \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $\Gamma = \Gamma(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, и $H = H(\theta) \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Употребляя символ Кронекера δ_{kl} и оператор математического ожидания $\mathbf{E}\{\cdot\}$, представим $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$ как белозумные, с нулевыми средними, взаимно независимые и одинаково распределенные последовательности, характеризующие стохастическую среду, с ковариационными матрицами $Q = Q(\theta) \in \mathbb{R}^{q \times q} \geq 0$ и $R = R(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$, при этом Q положительно полуопределена, а R положительно определена:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}\{w_k w_l^T\} &= Q \delta_{kl}, & \mathbf{E}\{v_k v_l^T\} &= R \delta_{kl}, \\ \mathbf{E}\{w_k v_l^T\} &= 0, & \mathbf{E}\{w_k x_0^T\} &= 0, & \mathbf{E}\{v_k x_0^T\} &= 0, \quad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В модели (1) начальное состояние x_0 может быть некоторым случайным вектором, не связанным с шумами $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$, со средним значением $\mathbf{E}\{x_0\} = \bar{x}_0$ и ковариацией $\mathbf{E}\{[x_0 - \bar{x}_0][x_0 - \bar{x}_0]^T\} = P_0 \geq 0$, при этом в общем случае $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(\theta)$ и $P_0 = P_0(\theta)$. Вход $\{u_t\}$ представляет собой целенаправленно приложенную извне возбуждающую последовательность (Persistent Excitation, PE) в разомкнутой системе управления или же генерирования данных $\{x_t\}$. Каким он должен быть, установим в Теореме 1 (раздел 8). Систему (1) считаем полностью наблюдаемой: $\text{rank} [H^T \mid (H\Phi)^T \mid \dots \mid (H\Phi^{n-1})^T]^T = n$.

3. Параметрическая неопределенность модели источника данных

Стохастическая модель (1), (2), конкретизируемая значением параметра θ , представляет собой некоторый технический процесс: либо порождения данных y_t в целях внешнего управления состоянием x_t , либо передачи данных x_t , смоделированных первым уравнением в (1), через канал с передаточной функцией H , смоделированный вторым уравнением в (1). Однако в реальности некоторые элементы вектора θ могут быть неизвестны. Сам факт, что элемент $\{\bullet\}$ модели (1), (2) изначально не известен и, следовательно, подлежит идентификации, будем отмечать верхним маркером: $\{\dot{\bullet}\}$. Сосредоточим внимание на случае, когда эти неизвестные находятся в матрице H , в матрице Q и в матрице R . Тогда имеем $H \equiv \dot{H}$, $Q \equiv \dot{Q}$, $R \equiv \dot{R}$. Таким образом, действующую *de facto* матрицу $H \equiv \dot{H}$ требуется восстановить из отклика $\{y_t\}$ на входное воздействие $\{u_t\}$ для стохастической и *de facto* параметрически неопределенной среды функционирования, в которой $Q \equiv \dot{Q}$, $R \equiv \dot{R}$.

4. Общий уточняющий детали пример

В качестве рабочего примера возьмем систему (модель) с размерностями $n = 2$, $p = 1$, $q = 2$ и $m = 1$, индекс наблюдаемости которой $s = n$, чтобы проверить работоспособность предлагаемого метода ВФК (вспомогательного функционала качества) и прояснить его ключевые детали. Вопросы, на которые должны быть даны ответы, следующие: А) Способен ли метод ВФК справляться с данным уровнем неопределенности модели? Б) Как реализовать вычисления по этому методу наиболее эффективно? В) Каковы показатели достигаемой точности и скорости идентификации параметров матрицы $H \equiv \dot{H}$?

Примем следующие типовые обозначения этого примера:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H^T = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, R = [r_{11}], \quad (3)$$

причем $q_{12} = q_{21}$, $Q \geq 0$, $R > 0$ и $\theta = [\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \psi_1, \psi_2, h_1, h_2, q_{11}, q_{12}, q_{22}, r_{11}]^T$. Из этих 12-ти элементов в (3) считаем неизвестными только H (два параметра), Q (три параметра) и R (один параметр). Следовательно, $l = 6$: вектор неопределенности $\dot{\theta} \in \Theta$, $\dot{\theta} = [\dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{22}, \dot{r}_{11}]^T$ содержит *шесть* элементов *трех* матриц:

$$H^T \equiv \dot{H}^T = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix}, Q \equiv \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} & \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{21} & \dot{q}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \dot{q}_{12} = \dot{q}_{21}, \quad R \equiv \dot{R} = [\dot{r}_{11}] > 0. \quad (4)$$

5. Шаг 1 метода ВФК: Переход к стандартной наблюдаемой модели (СНМ)

Исходная Физическая Модель Данных (ФМД) задана выражениями (1)–(3). Перейдем от ФМД к состоянию $\boxed{x^* \triangleq \dot{\mathcal{W}}x}$ СНМ [маркер \star помечает принадлежность элемента к СНМ]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &\triangleq \left[\dot{H}^T \mid (\dot{H}\Phi)^T \right]^T = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 & \dot{h}_2 \\ \dot{a}_1 & \dot{a}_2 \end{bmatrix}, \dot{a}_1 \triangleq \dot{h}_1\varphi_{11} + \dot{h}_2\varphi_{21}, \dot{a}_2 \triangleq \dot{h}_1\varphi_{12} + \dot{h}_2\varphi_{22}, \\ \Phi_\star &= \dot{\mathcal{W}}\Phi\dot{\mathcal{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\det \Phi & \text{tr} \Phi \end{bmatrix}, \dot{\Psi}_\star = \dot{\mathcal{W}}\Psi = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1^\star \\ \dot{\psi}_2^\star \end{bmatrix}, \dot{\psi}_1^\star \triangleq \dot{h}_1\psi_1 + \dot{h}_2\psi_2, \\ \dot{\psi}_2^\star &\triangleq \dot{h}_1(\varphi_{11}\psi_1 + \varphi_{12}\psi_2) + \dot{h}_2(\varphi_{21}\psi_1 + \varphi_{22}\psi_2), \quad \dot{\Gamma}_\star = \dot{\mathcal{W}}, \quad H_\star = [1 \ 0]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Полученная СНМ (6) существует и эквивалентна исходной ФМД, так как $\dot{\mathcal{W}}$ невырождена:

$$\mathcal{D}^\star(\theta) : \begin{cases} x_{t+1}^\star = \Phi_\star x_t^\star + \dot{\Psi}_\star u_t + \dot{\Gamma}_\star w_t, & t \in \mathbb{Z}_+, \\ y_t = H_\star x_t^\star + v_t, & t \in \mathbb{Z}_1. \end{cases} \quad (6)$$

Параметр $\dot{\theta} = [\dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{22}, \dot{r}_{11}]^T$ в ней присутствует, однако сейчас два его элемента $[\dot{h}_1, \dot{h}_2]$ оказались перемещены в две другие матрицы: $\dot{\Psi}_\star$ и $\dot{\Gamma}_\star$, но зато $H_\star = [1 \ 0]$.

6. Шаг 2: Целеполагание в форме СМ оптимального фильтра Калмана

Рассмотрим установившийся оптимальный фильтр Калмана (УОФК) для (6) как иное – установившееся инновационное представление источника данных (УИПИД). Это модельное УИПИД считаем *целевой моделью* (ЦМ), и эта ЦМ выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{M}^*(\hat{\theta}) : \left\{ x_{t+1|t}^* = \Phi_* x_{t|t}^* + \hat{\Psi}_* u_t, \quad x_{t|t}^* = x_{t|t-1}^* + \hat{K}_* \nu_{t|t-1}^*, \quad y_t = H_* x_{t|t-1}^* + \nu_{t|t-1}^* \right\} \quad (7)$$

с обозначением $\nu_{t|t-1}^* \triangleq y_t - H_* x_{t|t-1}^*$ так называемой *Обновляющей Последовательности*. Для ЦМ \equiv УОФК (7) два элемента \hat{k}_1^* and \hat{k}_2^* матрицы

$$\hat{K}_* = \begin{bmatrix} \hat{k}_1^* \\ \hat{k}_2^* \end{bmatrix} = \hat{\Sigma}_* H_*^T \left(H_* \hat{\Sigma}_* H_*^T + \hat{R} \right)^{-1} \quad (8)$$

неявно связаны с $\hat{\theta} = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{q}_{11}, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{22}, \hat{r}_{11}]^T$ через $\hat{\Sigma}_*$ – неизвестное единственное решение Алгебраического Уравнения Риккати (АУР)

$$\hat{\Sigma}_* = \Phi_* \left[\hat{\Sigma}_* - \hat{\Sigma}_* H_*^T \left(H_* \hat{\Sigma}_* H_*^T + \hat{R} \right)^{-1} H_* \hat{\Sigma}_* \right] \Phi_*^T + \hat{\Gamma}_* \hat{Q} \hat{\Gamma}_*^T. \quad (9)$$

Решать это АУР нет возможности в силу обстоятельств: неизвестность $\hat{\theta}$. Модель $\mathfrak{M}^*(\hat{\theta})$, определенная в (7), (8) и (9), показана лишь как та целевая модель, задачу стремления к которой должен решать адаптивный алгоритм идентификации, который надо построить.

7. Шаг 3: Множество приближенных моделей для адаптивного сканирования

Отмеченные обстоятельства и поставленная задача построения вынуждают вводить вполне формально множество $\mathcal{A} \triangleq \{\mathfrak{M}^*(\hat{\theta})\}$ приближенных моделей, обособленных собственным номером j и действующих параллельно источнику данных (1), (2). Каждая (j -я) модель из \mathcal{A} , а именно:

$$\mathfrak{M}^*(\hat{\theta}) : \left\{ g_{t+1|t}^* = \Phi_* g_{t|t}^* + \hat{\Psi}_* u_t, \quad g_{t|t}^* = g_{t|t-1}^* + \hat{K}_* \eta_{t|t-1}^*, \quad y_t = H_* g_{t|t-1}^* + \eta_{t|t-1}^* \right\} \quad (10)$$

возникает, когда $\hat{\theta} := \hat{\theta}[j]$. Она имеет собственную, ею определяемую последовательность $\eta_{t|t-1}^* \triangleq y_t - H_* g_{t|t-1}^*$. Индекс j нумерует модели (10), когда некоторый метод сканирует – по предположению, целенаправленно – множество \mathcal{A} , и j есть номер шага этого метода.

Структурно модели (10) неотличимы от скрытой ЦМ (7), но они принципиально иные внутренне: их параметр $\hat{\theta} = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{q}_{11}, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{22}, \hat{r}_{11}]^T$ служит как заменитель неизвестного $\hat{\theta} = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{q}_{11}, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{22}, \hat{r}_{11}]^T$. Это означает, что $\hat{\Psi}_*$ есть заменитель матрицы $\hat{\Psi}_*$, \hat{K}_* есть заменитель матрицы \hat{K}_* и $\hat{\Sigma}_*$ есть заменитель матрицы $\hat{\Sigma}_*$. Сравнивая (5) и (4), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \hat{W} &\triangleq \left[\hat{H}^T \mid (\hat{H}\Phi)^T \right]^T = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_2 \\ \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{a}_1 \triangleq \hat{h}_1 \varphi_{11} + \hat{h}_2 \varphi_{21}, \quad \hat{a}_2 \triangleq \hat{h}_1 \varphi_{12} + \hat{h}_2 \varphi_{22}, \\ \hat{\Psi}_* &= \hat{W} \Psi = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1^* \\ \hat{\psi}_2^* \end{bmatrix}, \quad \hat{\psi}_1^* \triangleq \hat{h}_1 \psi_1 + \hat{h}_2 \psi_2, \quad \hat{\psi}_2^* \triangleq \hat{h}_1 (\varphi_{11} \psi_1 + \varphi_{12} \psi_2) + \hat{h}_2 (\varphi_{21} \psi_1 + \varphi_{22} \psi_2), \\ \hat{\Gamma}_* &= \hat{W}, \quad \hat{K}_* = \begin{bmatrix} \hat{k}_1^* \\ \hat{k}_2^* \end{bmatrix} = \hat{\Sigma}_* H_*^T \left(H_* \hat{\Sigma}_* H_*^T + \hat{R} \right)^{-1}, \\ \hat{\Sigma}_* &= \Phi_* \left[\hat{\Sigma}_* - \hat{\Sigma}_* H_*^T \left(H_* \hat{\Sigma}_* H_*^T + \hat{R} \right)^{-1} H_* \hat{\Sigma}_* \right] \Phi_*^T + \hat{\Gamma}_* \hat{Q} \hat{\Gamma}_*^T, \\ \hat{H}^T &= \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \hat{R} = [\hat{r}_{11}] > 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пробное значение $\hat{\theta} := \hat{\theta}[j]$ должно возникать как результат j -го шага оптимизационной процедуры с тем, чтобы обеспечить сходимость $\hat{\theta}[j] \rightarrow \hat{\theta}$, когда j уходит в бесконечность. Чтобы осуществить этот подход, нужно иметь некоторый *Конструктивный Критерий Оптимизации* (ККО). Принимая во внимание недоступность модели (7) к прямому наблюдению, будем трактовать желаемый ККО как *Средство Визуализации Цели* (СВЦ).

8. Шаг 4: Средство Визуализации Цели (СВЦ)

Зная индекс наблюдаемости системы s , дополним $\mathfrak{M}^*(\hat{\theta})$ (10) k -шаговыми предикторами

$$\left. \begin{aligned} g_{t+k|t}^* &\triangleq \Phi_* g_{t+k-1|t}^* + \hat{\Psi}_* u_{t+k-1}, \\ \hat{y}_{t+k|t} &\triangleq H_* g_{t+k|t}^* \end{aligned} \right\} k = \overline{1, s}. \quad (12)$$

Для данного примера $s = 2$, как сказано в разделе 4. Из (12) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}_{t+1|t} &\triangleq H_* g_{t+1|t}^*, \quad \hat{y}_{t+2|t} \triangleq H_* g_{t+2|t}^*, \\ g_{t+2|t}^* &\triangleq \Phi_* g_{t+1|t}^* + \hat{\Psi}_* u_{t+1}, \quad \hat{y}_{t+2|t} \triangleq H_* \Phi_* g_{t+1|t}^* + H_* \hat{\Psi}_* u_{t+1}, \\ \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \hat{y}_{t+2|t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_* \\ H_* \Phi_* \end{bmatrix} g_{t+1|t}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ H_* \hat{\Psi}_* \end{bmatrix} u_{t+1} = g_{t+1|t}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\psi}_1^* \end{bmatrix} u_{t+1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В соответствии с (13) запишем то, что следует из (7):

$$\left. \begin{aligned} y_{t+1} &\triangleq H_* x_{t+1|t}^* + \nu_{t+1|t}^*, \\ y_{t+2} &\triangleq H_* x_{t+2|t+1}^* + \nu_{t+2|t+1}^*, \\ x_{t+2|t+1}^* &\triangleq \Phi_* x_{t+1|t}^* + \hat{\Psi}_* u_{t+1} + \Phi_* \hat{K}_* \nu_{t+1|t}^*, \\ y_{t+2} &\triangleq H_* \Phi_* x_{t+1|t}^* + H_* \hat{\Psi}_* u_{t+1} + H_* \Phi_* \hat{K}_* \nu_{t+1|t}^* + \nu_{t+2|t+1}^*, \\ \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_* \\ H_* \Phi_* \end{bmatrix} x_{t+1|t}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ H_* \hat{\Psi}_* \end{bmatrix} u_{t+1} + \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ H_* \Phi_* \hat{K}_* & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{t+1|t}^* \\ \nu_{t+2|t+1}^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Выгоды от применения СНМ заключаются в том, что

$$\begin{bmatrix} H_* \\ H_* \Phi_* \end{bmatrix} = I, \quad \begin{cases} H_* \Phi_* \hat{K}_* = \hat{k}_2^*, \\ H_* \hat{\Psi}_* = \hat{\psi}_1^*, \quad H_* \hat{\Psi}_* = \hat{\psi}_1^*. \end{cases} \quad (15)$$

Вычитание двух нижних строк в (14) и (13) друг из друга с учетом (15) дает

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{t+1|t}(\hat{\theta}) &\triangleq \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \hat{y}_{t+2|t} \end{bmatrix} = \delta_{t+1|t}^*(\hat{\theta}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\psi}_1^* - \hat{\psi}_1^* \end{bmatrix} u_{t+1} + \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ \hat{k}_2^* & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{t+1|t}^* \\ \nu_{t+2|t+1}^* \end{bmatrix}, \\ \delta_{t+1|t}^*(\hat{\theta}) &\triangleq x_{t+1|t}^* - g_{t+1|t}^*(\hat{\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Теорема 1 Дана $\varepsilon_{t+1|t}(\hat{\theta})$ (16) как s -компонентная вектор-функция (в этом примере $s = 2$), составленная из s невязок, а именно, из $\eta_{t+1|t} \triangleq y_{t+1} - \hat{y}_{t+1|t}$ и $\eta_{t+2|t} \triangleq y_{t+2} - \hat{y}_{t+2|t}$, вычисленных согласно (14) и (13) для модели $\mathfrak{M}^*(\hat{\theta})$ (10)+(12), чей Исходный Функционал Качества принципиально не доступен для любого практического метода:

$$\text{ИФК} = \mathcal{J}_t^o(\hat{\theta}) \triangleq \mathbf{E} \left\{ \left(\delta_{t+1|t}^*(\hat{\theta}) \right)^\top \left(\delta_{t+1|t}^*(\hat{\theta}) \right) \right\}. \quad (17)$$

Предположение \star Пусть u_t есть целенаправленно возбуждающий (*Persistently Exciting*) внешний вход в форме белозумной последовательности, которая статистически не зависима от белозумных последовательностей $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$, характеризующих стохастическую среду функционирования данной системы (1).

Введем Вспомогательный Функционал Качества

$$ВФК = \mathcal{J}_t^a(\hat{\theta}) \triangleq \mathbf{E} \left\{ \left(\varepsilon_{t+1|t}(\hat{\theta}) \right)^T \left(\varepsilon_{t+1|t}(\hat{\theta}) \right) \right\}. \quad (18)$$

Тогда минимум по $\hat{\theta}$ этого ВФК (18), обеспеченный любым методом в каждый момент времени t , эквивалентен достижению минимума по $\hat{\theta}$ теоретического ИФК (17):

$$\min_{\hat{\theta}} \mathcal{J}_t^a(\hat{\theta}) \iff \mathbf{E} \left\{ \left\| x_{t+1|t}^* - g_{t+1|t}^* \right\|^2 \right\} = 0.$$

Доказательство. Непосредственное вычисление критерия (18) должно учитывать Предположение \star и тот известный факт, что *Обновляющая Последовательность* (ОП) $\{\dots, \nu_{1|0}^*, \nu_{2|1}^*, \dots, \nu_{t|t-1}^*, \nu_{t+1|t}^*, \nu_{t+2|t+1}^*\}$ обладает свойствами дискретного белого шума. Третье слагаемое в первой строке (16) содержит последние два элемента этой последовательности: $\nu_{t+1|t}^*$ и $\nu_{t+2|t+1}^*$, в то время как в первом слагаемом этой строки (оно показано вторым выражением в (16)) вектор $x_{t+1|t}^*$ обязан своим происхождением предыдущим элементам $\{\dots, \nu_{1|0}^*, \nu_{2|1}^*, \dots, \nu_{t|t-1}^*\}$ ОП, а $g_{t+1|t}^*$ вовсе не зависит от ОП. Три слагаемые первой строки (16) попарно независимы. Поэтому это вычисление дает

$$\mathcal{J}_t^a(\hat{\theta}) = \mathcal{J}_t^o(\hat{\theta}) + \left(\hat{\psi}_1^* - \psi_1^* \right)^2 \mathbf{E} \left\{ u_{t+1}^2 \right\} + \left[1 + \left(\hat{k}_2^* \right)^2 \right] \mathbf{E} \left\{ \left(\nu_{t+1|t}^* \right)^2 \right\} + \mathbf{E} \left\{ \left(\nu_{t+2|t+1}^* \right)^2 \right\} \quad (19)$$

В этом выражении все слагаемые неотрицательны, третье слагаемое не зависит от $\hat{\theta}$, но первые два – зависят. Их минимальное (нулевое) значение будет достигнуто тогда и только тогда, когда $\hat{\theta} = \hat{\theta}$. При этом первые два слагаемые в (19) обращаются в нуль, и

$$\min_{\hat{\theta}} \mathcal{J}_t^a(\hat{\theta}) = \left[1 + \left(\hat{k}_2^* \right)^2 \right] \mathbf{E} \left\{ \left(\nu_{t+1|t}^* \right)^2 \right\} + \mathbf{E} \left\{ \left(\nu_{t+2|t+1}^* \right)^2 \right\}.$$

□

9. Экспериментальная проверка теоретических положений данного метода

В экспериментах значения ВФК приходится вычислять в виде выборочного среднего

$$\text{API}_{\text{avg}} = \tilde{\mathcal{J}}_t^a(\hat{\theta}) \triangleq \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\| \varepsilon_{t+1-k|t-k}(\hat{\theta}) \right\|^2 \quad (20)$$

взамен математического ожидания $\mathbf{E} \{ \cdot \}$ в (18). Значения $\hat{\theta} \triangleq \left[\hat{h}_1 \mid \hat{h}_2 \mid \hat{q}_{11} \mid \hat{q}_{12} \mid \hat{q}_{22} \mid \hat{r}_{11} \right]^T$, являющиеся элементами трех матриц примера в разделах 4 и 5, заданы значениями:

$$\hat{H}^T = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 = 9.000 \\ \hat{h}_2 = 1.000 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} 0.0057 & 0.0056 \\ 0.0056 & 0.1082 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = [1.0000]. \quad (21)$$

Считаем, что их необходимо идентифицировать, используя данный метод, тогда как другие параметры известны:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.677 & 0.067 \\ -0.670 & -0.060 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 = 0.032 \\ \psi_2 = 0.067 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Эти данные можно найти в одной из задач монографии [7, pp. 216–217, Problem 14.45].

Зададимся целью показать экспериментально, что точки минимума ИФК и ВФК по параметру $\hat{\theta}$ совпадают. Вычислительный эксперимент проведем в системе MATLAB. Полученные результаты (Рисунок 1) подтверждают ожидаемое совпадение. Вместе с тем видно, что ВФК обладает несколько меньшей, чем ИФК, селективностью.

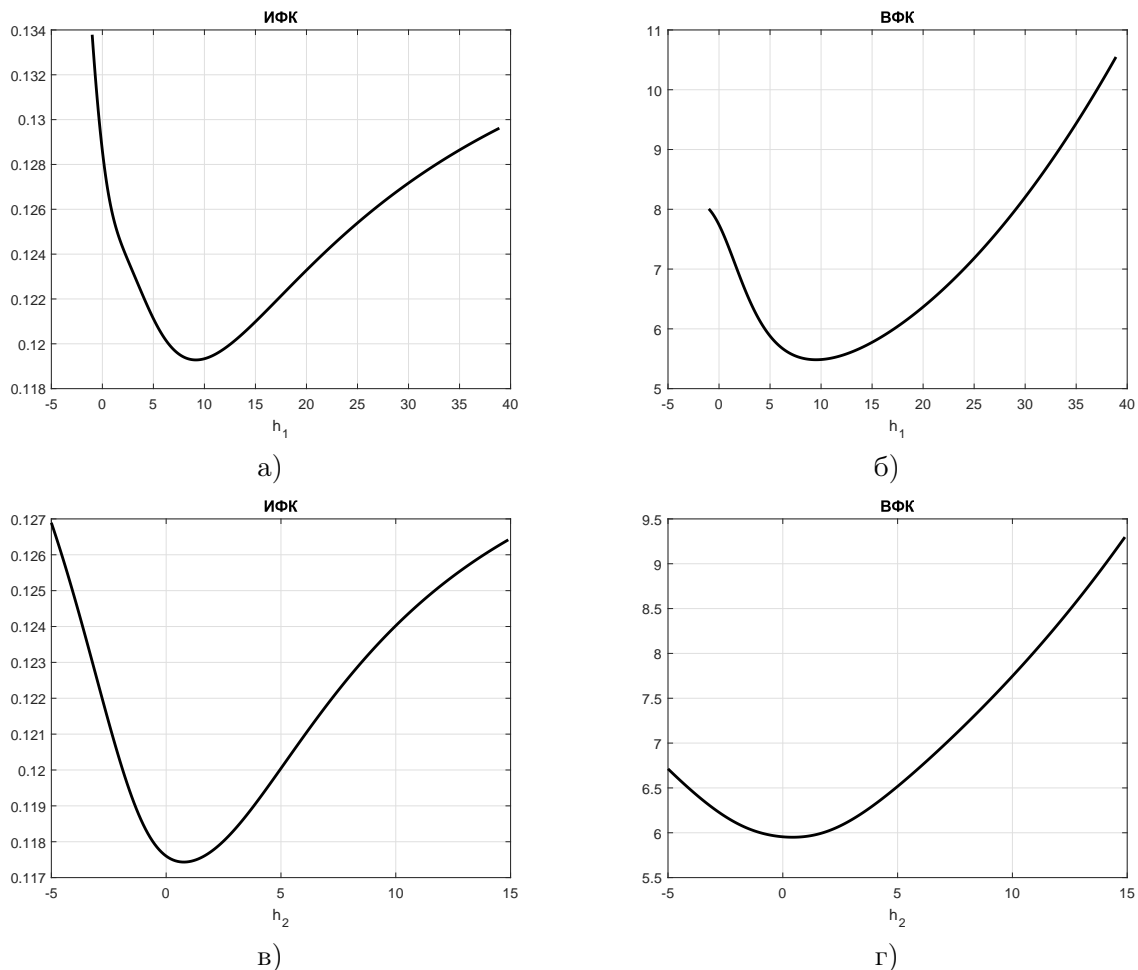


Рисунок 1. Значения функционалов качества: *ИФК* – графики а) и в), *ВФК* – графики б) и г) при изменении параметра h_1 – графики а) и б) и параметра h_2 – графики в) и г).

10. Заключение

Возвращаясь к вопросам, поставленным в разделе 4, констатируем, что на вопрос А получен положительный ответ: Да, метод ВФК позволяет справляться с задачей идентификации передаточной матрицы измерителя при условии, что входной сигнал на измеритель генерируется от целенаправленно приложенного белозумного возбуждения динамической модели входного сигнала. Дальнейшая работа направлена на изучение вопросов Б и В.

11. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18-47-730001 p_a, 18-41-732002 p_мк.

12. Литература

- [1] Caines, P.E. *Linear Stochastic Systems* / P.E. Caines // New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 1988. – 874 p.
- [2] Wang, L.-Y. *System identification : new paradigms, challenges, and opportunities* / L.-Y. Wang, W.-X. Zhao // *Acta Automatica Sinica*. – 2013. – Vol. 39(7). – P. 933-942.
- [3] Cendrillon, R. *A near-optimal linear crosstalk precoder for downstream VDSL* / R. Cendrillon, G. Ginis, E. van den Bogaert, M. Moonen // *IEEE Transactions on Communications*. – 2007. – Vol. 55(5). – P. 860-863.
- [4] Dungen, M. *Crosstalk Mitigation Techniques for Digital Subscriber Line Systems* / M. Dungen – Moers: Technische Universitat Hamburg-Harburg, 2016. – 160 p.
- [5] Signals and Systems Group, Web Site Uppsala University [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.signal.uu.se/Publications/ptheses.html> (30.11.2019).
- [6] Semushin, I.V. *Adaptation in stochastic dynamic systems_Survey and new results II* / I.V. Semushin // *Int. J. Commun., Network and System Sciences*. – 2011. – Vol. 4(4). – P. 266-285.
- [7] Maybeck, P.S. *Stochastic Models, Estimation, and Control* / P.S. Maybeck – NY: Academic Press, 1982. – Vol. 3. – 291 p.

State measuring set (data transferring channel) identification for stochastic and uncertain environments

I.V. Semushin¹, Yu.V. Tsyganova¹

¹Ulyanovsk State University, L. Tolstoy Str. 42, Ulyanovsk, Russia, 432017

Abstract. The paper performs the measurement identification objectives analysis under stochastic and uncertain conditions close to reality in control or communication systems. An example when such a situation arises in communication systems is the quest for channel state information (CSI). CSI is vital for many reasons. Among other events, the CSI may include a specific estimate of the direct and crosstalk channels along with information on their accuracy before precoding the transmit signals for crosstalk cancellation. The solution developed resides in constructing an adaptive Kalman filter (AKF) such one that converges to the optimal Kalman filter (OKF) without any bias in estimates. This result is achieved by constructing and then minimizing a specific Auxiliary Performance Index (API). The API must satisfy the two conditions: 1) it arrives at its minimum point coincidentally with the Original Performance Index (OPI), which cannot be measured, and 2) it is measurable and admissible for using by any practical optimization method. The presentment of this so-called Active Principle of Adaptation in a given general specification example makes it possible to retrace the procedure of the solution step-by-step. Experimental validation of the theoretical ideas concludes the paper.