Идентификация экспоненциальных трендовых моделей с дробным белым шумом

Д.В. Иванов[1], Н.В. Чертыковцева[2], А.А.Терехова(Жаркова)[3], Е.А. Андреева[3]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086
[2]Самарский государственный университет путей сообщения, Свободы 2В, Самара, Россия, 443066
[3]Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского, Земляной вал 73, Москва, Россия 109004

Аннотация. В статье предложены алгоритмы для идентификации параметров экспоненциальных трендовых моделей при наличии дробным белым шума. В статье рассмотрено три вида моделей, являющихся решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Идентификация решения дифференциального уравнения позволяет повысить точность за счет учета априорной информации о характере корней дифференциального уравнения и начальных условиях. Однако идентификация решения сопряжена с трудностями, связанными с нелинейностью по параметрам, получаемых решений. Предложены двухшаговые алгоритмы, позволяющие определять оценки параметров, рассматриваемых трендовых моделей. Тестовые примеры показали высокую точность оценок, получаемых с помощью разработанных алгоритмов.

1. Введение

В последние возросло число использований моделей длинной памяти в экономических приложениях. Длинная память или долгосрочная зависимость – свойство, описывающее корреляционную структуру высокого порядка временного ряда [1,2]. В случае, если ряд обладает длинной памятью, то зависимость существует даже между далеко отстоящими друг от друга во времени наблюдениями. Одной из наиболее распространенных моделей длинной памяти является модель ARFIMA (Autoregressive fractionally integrated moving average). Частным случаем модели ARFIMA является дробный белый шум. Оценивание параметров динамических систем при наличии дробного белого шума рассматривается в [3,4].

В работе рассматриваются алгоритмы идентификации экспоненциальных моделей с дробным белым шумом.

2. Постановка задачи

В статье рассматривается задача идентификации трендов в виде решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка при наличии дробного белого шума. Оценивание параметров решений дифференциальных уравнений сопряжено с трудностями, поскольку решения являются нелинейными функциями от параметров. Статья посвящена разработке алгоритмов идентификации, позволяющих определять оценки параметров, рассматриваемых трендовых моделей.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$z'' + pz' + qz = 0\,, \tag{1}$$

где y – искомая функция, а p и q – числа.

Уравнению (1) соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0\,. \tag{2}$$

Обозначим корни характеристического уравнения (2) через k_1, k_2.

В зависимости от характера корней решение дифференциального уравнения могут описываться тремя различными функциями [5]:

1) Если корни характеристического уравнения вещественные и различны: $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1) имеет вид

$$z = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

2. В случае, когда корни характеристического уравнения вещественные и равные: $k_1 = k_2 = k \in R,$ общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (11) является функция

$$z = C_1 e^{kt} + C_2 x e^{kt} = e^{kt}\left(C_1 + C_2 t\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

3) Если корни характеристического уравнения комплексно сопряженные: $k_1 = b + iw$, $k_2 = b - iw, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1) имеет вид

$$z = e^{bt}\left(C_1 \cos wt + C_2 \sin wt\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

В экономических приложениях процесс имеет помимо трендовой процесс обычно имеет стохастическую составляющую. Часто стохастическая составляющая не удовлетворяет условиям Гаусса-Маркова. В работе рассматривается обобщение белого шума дробный белый шум, называемый также 1/f шумом.

В [6] работе показано, что дробная производная тесно связана со спектром 1/f шума. Для моделирования дискретного аналога 1/f шума, возможно использовать разность дробного порядка. Наблюдаемый процесс имеет вид

$$y_i = z_i + \Delta^{\alpha}\xi_i\,, \tag{6}$$

где $\Delta^{\alpha}\xi_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{\alpha}{j}\xi_{i-j}$, $\binom{\alpha}{j} = (-1)^j \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$, $-1/2 < \alpha < 1/2$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$

В работе рассматриваются алгоритмы идентификации параметров моделей трендов (3), (4), (5) по дискретным значениям y_i.

3. Алгоритмы идентификации

Предложены двухшаговые алгоритмы, позволяющие определять оценки параметров, рассматриваемых трендовых моделей.

На первом этапе осуществляется переход от нелинейной по оцениваемым параметрам статической модели тренда к линейной по параметрам динамической модели (авторегрессии). Идентификация параметров проводится в предположении, что модель представляет собой сумму тренда и дробного белого шума, что не позволяет применить известные методы оценки параметров авторегрессии. Оценивание параметров динамической модели проводится с помощью разработанного в статье алгоритма оценивания на основе минимизации обобщённого отношения Рэлея.

На втором этапе на основе оценок параметров авторегрессии осуществляется оценка параметров тренда.

3.1 Случай действительных неравных корней

Запишем решение дифференциального уравнения (1) для дискретных значений :

$$y_i = A_1 \exp(-b_1 \cdot T_i) + A_2 \exp(-b_2 \cdot T_i) + \Delta^{\alpha}\xi_i, \tag{7}$$

где $T_i = i \cdot \Delta t,\ \Delta t$ - интервал дискретизации.

В работе предложен двухшаговый алгоритм, позволяющий идентифицировать параметры уравнения (7):

Шаг 1. Идентификация нелинейных параметров b_1, b_2 путем переход от уравнения (7) к линейному разностному уравнению.

Эффективным методом идентификации на коротких выборках является представление уравнения (1) в виде линейного разностного уравнения на основе аппарата Z-преобразования. Так как в выражении один содержится постоянный коэффициент, запишем разностное уравнение относительно первых разностей, для $k > 3$:

$$z_k = c_1 z_{k-1} + c_2 z_{k-2},$$
$$y_i = z_i + \Delta^{\alpha}\xi_i, \tag{8}$$

где $c_1 = \exp(-b_1 \cdot \Delta t) + \exp(-b_2 \cdot \Delta t),\quad c_2 = \exp(-b_1 \cdot \Delta t) \cdot \exp(-b_2 \cdot \Delta t),$

Ошибку прогноза модели (8) можно записать в виде:

$$\varepsilon_k = \Delta^{\alpha}\xi_k - c_1 \Delta^{\alpha}\xi_{k-1} + c_2 \Delta^{\alpha}\xi_{k-2} \tag{9}$$

Применение классического метода наименьших квадратов не позволяет получать состоятельные оценки параметров уравнения (4) из-за наличия автокорреляции в ошибке прогноза ε_k .

Найдем математическое ожидание квадрата ошибки:

$$E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma_\xi^2 + c^T H_\alpha c - 2c^T h_\alpha = \sigma_\xi^2 (1 + c^T \bar{H}_\alpha c - 2c^T \bar{h}_\alpha),$$

где $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T$, $\bar{h}_\alpha = \begin{pmatrix} h_\alpha(1) & h_\alpha(2) \end{pmatrix}^T$, $\bar{H} = \begin{pmatrix} 1 & h_\alpha(1) \\ h_\alpha(1) & 1 \end{pmatrix}$. $h_\alpha(m) = \dfrac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ j-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} \dfrac{N-j}{N}.$

Будем искать оценки параметров в виде обобщенного отношения Релея [7]:

$$\hat{c} = \arg\min_c \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - c_1 z_{i-1} - c_2 z_{i-2})^2}{1 + c^T \bar{H}_\alpha c - 2c^T \bar{h}_\alpha}. \tag{10}$$

Условиями отнесения анализируемого временного ряда к модели суммы двух экспонент (7) уже на первом этапе идентификации будет система неравенств

$$\begin{cases} 0 < c_1 < 2, \\ 0 < c_2 < 0.25 \cdot c_1^2. \end{cases} \tag{11}$$

Условия (11) можно считать неявной регуляризацией выражения (10).

Оценки коэффициентов вектора $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}^T$, могут быть получены по следующим формулам:

$$\hat{b}_1 = \frac{-\ln(\hat{c}_1) - \sqrt{\hat{c}_1^2 - 4\hat{c}_2} + \ln(2)}{\Delta t},$$
$$\hat{b}_2 = \frac{-\ln(\hat{c}_1) + \sqrt{\hat{c}_1^2 - 4\hat{c}_2} + \ln(2)}{\Delta t}. \tag{12}$$

Шаг 2. Идентификация линейных параметров, входящих в уравнение (7).

Вектор линейных параметров может быть определен на основе классического метода наименьших квадратов:

$$\hat{A} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y, \tag{13}$$

где $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \end{pmatrix}^T$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}^T$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \exp(-b_1 \cdot T_1) & \exp(-b_2 \cdot T_1) \\ \vdots & \vdots \\ \exp(-b_1 \cdot T_N) & \exp(-b_1 \cdot T_N) \end{pmatrix}.$$

3.2 Случай действительных равных корней

Запишем решение дифференциального уравнения (2) для дискретных значений с дробным белым шумом:

$$y_i = \left(A_1 + A_2 T_i\right)\exp(-b_1 \cdot T_i) + \Delta^{\alpha}\xi_i, \tag{14}$$

Шаг 1. Применяя Z-преобразование к уравнению (14) получим систему уравнений (8), где $c_1 = 2\exp(-b_1 \cdot \Delta t)$. Оценки коэффициентов могут быть определены из соотношения (10).

Условиями принятия модели произведения экспоненты на линейную форму аргумента, т.е. модели (14), являются следующие соотношения

$$\begin{cases} 0 < c_1 < 2, \\ c_2 = 0.25 \cdot c_1^2. \end{cases}$$

Параметр b_1 модели (14) может быть определен по формуле:

$$\hat{b}_1 = \frac{-\ln\left(\hat{c}_1/2\right)}{\Delta t}, \tag{15}$$

Шаг 2. Вектор линейных параметров может быть определен по формуле (13), где Φ определяется по формуле:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \exp(-b_1 \cdot T_1) & T_1 \exp(-b_2 \cdot T_1) \\ \vdots & \vdots \\ \exp(-b_1 \cdot T_N) & T_N \exp(-b_1 \cdot T_N) \end{pmatrix}.$$

3.3 Случай комплексно-сопряженных корней

Для случая с комплексно сопряженными корнями дискретные значения решения уравнения (2) с дробным белым шумом могут быть записаны в виде:

$$y_i = A\exp(-b_1 T_i)\cos(\omega T_i + \varphi) + \Delta^{\alpha}\xi_i, \tag{16}$$

Шаг 1. Оценивание параметров происходит аналогично случаям для действительных корней. Коэффициенты авторегрессии зависят от параметров уравнения (16) следующим образом:

$$c_1 = 2\exp(-b_1 \cdot \Delta t)\cos(\mathrm{w} \cdot \Delta t), \quad c_1 = 2\exp(-b_1 \cdot \Delta t).$$

Для коэффициентов авторегрессии должно выполняться следующее условие $0.25 c_1 < c_2^2 < 1$.

Оценки параметров $\hat{b}_1$ и $\hat{w}$ могут быть определены по следующим формулам:

$$\hat{b}_1 = \frac{-\ln\left(\hat{c}_2\right)}{2\Delta t}, \quad \hat{w} = \frac{1}{\Delta t}\arccos\left(\frac{c_1}{2\sqrt{c_2}}\right).$$

Шаг 2. Вектор линейных параметров может быть определен по формуле (13), где Φ определяется по формуле:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \exp(-b_1 \cdot T_1)\sin\left(\mathrm{w} \cdot T_1\right) & \exp(-b_1 \cdot T_1)\cos\left(\mathrm{w} \cdot T_1\right) \\ \vdots & \vdots \\ \exp(-b_1 \cdot T_N)\sin\left(\mathrm{w} \cdot T_N\right) & \exp(-b_1 \cdot T_N)\sin\left(\mathrm{w} \cdot T_N\right) \end{pmatrix},$$

тогда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \ \varphi = arctg\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

4. Тестовый пример

Предложенные алгоритмы (НМНК) идентификации были реализованы в Matlab и сравнивались с алгоритмами, использующими на первом шаге МНК оценку авторегрессионных параметров [8]. Рассмотрим в качестве примера рассмотрим идентификацию решения с комклексно-сопряженными корнями:

$$y_i = 4\exp(-0.5T_i)\cos(2T_i + 0.5) + \Delta^{0.3}\xi_i, \tag{17}$$

Число наблюдений равно $N = 40$. Интервал дискретизации $\Delta t = 0.2$.

В качестве показателей качества модели использовались коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \hat{z}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - E[\, y_i\,]\right)^2},$$

и относительная среднеквадратическая погрешность оценивания параметров

$$\delta c = \sqrt{\frac{\left\|\hat{c} - c\right\|^2}{\left\|c\right\|^2}} \cdot 100\%.$$

В таблице 1 приведены результаты идентификации для отношения среднеквадратического отношения $\sigma_\xi^2 / \sigma_z^2 = 0.2$:

Таблица 1. Результаты идентификации.

	c_1	c_2	δc	b_1	ω	R^2
истинные	1.6668	-0.8187		0.5	2	0.972
МНК	1.2572	-0.4996	27.9	1.73	2.38	0.768
НМНК	1.6624	-0.8268	0.5	0.475	2.09	0.973

5. Заключение

В работе предложен алгоритмы идентификации решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка при наличии дробного белого шума. В дальнейшем предполагается разработать и протестировать алгоритм идентификации, учитывающий на первом шаге ограничения на параметры авторегрессии в зависимости от типа решения.

6. Литература

[1] Granger, C.W.J. An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing / C.W.J Granger, R. Joyeux // Journal of Time Series Analysis. – 1980. – Vol. 1(1). – P. 15-29.

[2] Baillie, R.T. Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics / R.T. Baillie // Journal of Econometrics. – 1996. – Vol. 73(1). – P. 5-59.

[3] Das, S. Least square and instrumental variable system identification of AC servo position control system with fractional Gaussian noise / S. Das, A. Kumar, I. Pan, A. Acharya, Sh. Das, A. Gupta // Paper presented at International Conference on Energy, Automation and Signal. – 2011. – Vol. 6147165. – P. 545-550.

[4] Ivanov, D.V. Identification Fractional Linear Dynamic Systems with fractional errors-in-variables / D.V. Ivanov, A.V. Ivanov // J. Phys.: Conf. Ser. – 2017. – Vol. 803(1).

[5] Refaat, E.A. Lecture notes on Z-Transform, Lulu Press. – Morrisville NC, 2005.

[6] Рехвиашвили, С.Ш. Моделирование фликкер-шума с помощью дробного интегро-дифференцирования / С.Ш. Рехвиашвили // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 6. – С. 123-126.
[7] Иванов, Д.В. Оценивание частоты в трехфазных электрических цепях с автокоррелированными помехами / Д.В. Иванов, О.А. Кацюба, Б.К. Григоровский // Электротехника. – 2017. – Т. 3. – С. 26-30.
[8] Семёнычев, В.К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии / В.К. Семёнычев. – Самара: АНО «Изд-во СНЦ РАН, 2004. – 243 с.

Благодарности
Авторы благодарят проф. О.А. Кацюба за критические замечания и советы.

Identification of exponential trend models with fractional white noise

D.V. Ivanov[1], N.V. Chertykovtseva[2], A.A. Terekhova (Zharkova)[3], E.A. Andreeva[3]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443062
[2]Samara State university of transport, Svobody 2B, Samara, Russia, 443066
[3]Moscow State University of technologies and management, Zemlyanoj Val 73, Moscow, Russia, 109004

Abstract. The paper suggests algorithms for identifying parameters of exponential trend models in the presence of fractional white noise. The paper considers three types of models that are solutions of a homogeneous linear differential equation of the second order. Identification of the solution of a differential equation makes it possible to increase accuracy by taking into account a priori information about the nature of the roots of the differential equation and initial conditions. However, identification of the solution is fraught with difficulties due to nonlinearity in the parameters of the obtained solutions. Two-step algorithms are proposed, allowing to determine the estimates of the parameters of the considered trend models. Test examples showed high accuracy of the estimates obtained using the developed algorithms.