Характеристика декоррелирующих свойств сплайнового вейвлет-преобразования

Ю.А. Герасимова

Поволжский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики, 443010, ул. Льва Толстого, 23, Самара, Россия

Аннотация

Статья посвящена вопросам применения сплайнового вейвлет-преобразования к последовательностям сильнокоррелированных случайных величин. Методика обработки данных с использованием сплайновых вейвлетов позволяет ослабить их коррелированность, что было показано в ранее опубликованных работах [1,2]. Также ранее были проведены исследования, доказывающие эффективность применения линейного дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) к последовательностям случайных величин на реальных данных в рамках задач теории массового обслуживания. В данной статье исследуется вопрос эффективности использования квадратичного быстрого ДВП на базе сплайнов, формулируется соответствующая теорема и предоставляются данные численных экспериментов.

Ключевые слова: сплайновые вейлветы; декорреляция; дискретное вейвлет-преобразование; временные ряды.

1. Введение

Известно, что для гауссовского случайного процесса наилучшим методом декорреляции является переход к базису Карунена-Лоэва [3]. Но высокая вычислительная сложность и отсутствие быстрых алгоритмов преобразования затрудняет его использование в задачах обработки временных рядов. Сегодня применение дискретных вейвлет-преобразований (ДВП) широко изучается в научных центрах всего мира. Из всего спектра вейвлет-базисов в настоящей работе исследуются сплайн-базисы разной степени, как потенциально наиболее эффективные в рамках задачи ослабления коррелированности последовательности данных.

2. Сплайновые вейвлет-функции

Пусть $[a,b]$ – произвольный отрезок, $m \geq 1$ – натуральное число, n_0 – такое целое число, что $2^{n_0} < 2m+1 < 2^{n_0+1}$ и k – такое целое число, что $2^k > 2m-1$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0+1, \ldots\}$ разбиений отрезка $[a,b]$ с шагом $h = h_n = (b-a)/2^n$. Обозначим через $S(\Delta_n, m, k)$ совокупность сплайнов степени m дефекта k, определенных на сетке Δ_n. На каждом разбиении рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n, m-1, 1)$. Тогда для каждого $k \geq n_0$ пространство $S(\Delta_n, m-1, 1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \otimes W_{n_0+1} \otimes W_{n_0+2} \otimes \ldots \otimes W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k. Вейвлет-базис получается как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \leq n \leq k$.

Для $i \geq 0$, такого, что отрезок $\left[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}\right]$ целиком содержится в $[a,b]$, функцию $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ будем искать по формуле

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j \phi_{j,n-1}$$

, где $\phi_{k,n-1}$ – нормированный В-сплайн. Коэффициенты α_j находятся из условия

$$\left(\psi_{i,n}(x), \phi_{k,n-1}\right) = 0, k = i-m+1, i-m+2, \ldots, i+2m-2$$

Совокупность построенных вейвлет-функций получается сдвигом одной единственной функции $\psi_{0,n}$ по формуле

$$\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}\left(2^{n-n_0} x - i(b-a)/2^{n_0-1}\right)$$

Подробнее полуортогональные сплайновые вейвлеты и алгоритм построения $\psi_{i,n}(x)$ описаны в работах Блатова И.А. [4]. На Рис.1 представлены графики центральных сплайновых вейвлет-функций для $m = 2, m = 3$ и $m = 4$.

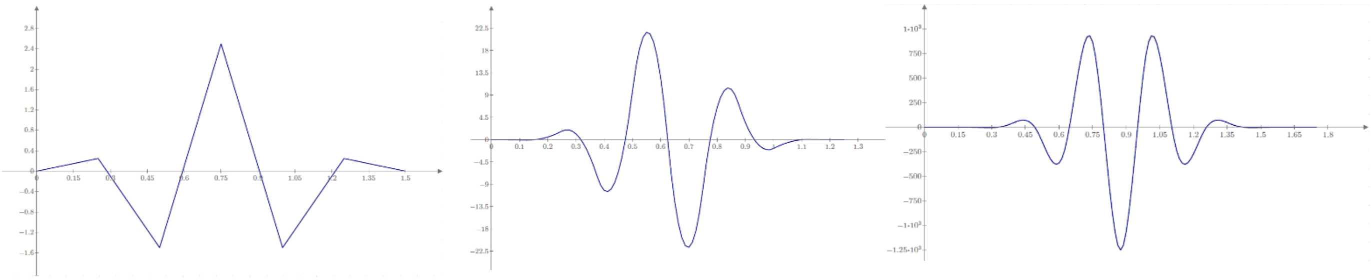

Рис.1 Сплайновые вейвлет-функции - линейная, квадратичная и кубическая (слева направо).

3. Концепция быстрого ДВП на базе сплайнов

Дискретное вейвлет-преобразование реализуется посредством пирамидального алгоритма Малла [3]. Быстрое ДВП – линейное преобразование, обрабатывающее численный вектор длиной N, кратной некоторой степени числа 2, преобразовывая его в другой вектор такой же длины. Дискретное вейвлет-преобразование обратимо и, в общем случае, ортогонально. Но для вейвлет-преобразований в классе финитных ортогональных вейвлетов, отсутствует возможность применения быстрых экономичных алгоритмов, существующих для кусочно-полиномиальных функций. А для кусочно-полиномиальных функций не существует ортогональных систем с конечным числом носителей. Избежать этих недостатков дает возможность применение финитных полуортогональных сплайновых вейвлетов.

3.1. Краткий алгоритм

Задача прямого преобразования заключается в поиске набора коэффициентов

$$\left\{d_{0j}, -m+1 \le j \le 2^{n_0}-1\right\} \bigcup \bigcup_{i=1}^{k-n_0} \left\{c_{ij}, -m+1 \le j \le 2^{n_0+i-1}-m\right\}$$

по заданной функции $f = \left\{f_{ij}\right\}, 0 \le i \le 2^k - 1, 1 \le j \le s$.

Задача обратного вейвлет-преобразования заключается в восстановлении всех значений $f_{ij}, 0 \le i \le 2^k - 1, 1 \le j \le s$ функции $\left\{f_{ij}\right\} \in \tilde{S}\left(\Delta_k, m-1, 1\right)$ по заданному набору коэффициентов, если

$$f = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0-1}} d_{0j}\phi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-m}} c_{ij}\psi_{j,n_0+1}$$

Подробнее алгоритм быстрого ДВП описан в работе Блатова И.А [4].

3.2. Оценка декоррелирующих свойств

Пусть $X = \left\{X_i\right\}, 0 \le i \le n, n = 2^k$ - последовательность случайных величин. Для каждой реализации последовательности X обозначим через $PX(t) \in S(\Delta, 2, 1), t \in [0, n]$ интерполяционный сплайн первой степени (непрерывную ломанную), построенный по точкам $\left(t_i, X_i\right), 0 \le i \le n,$ где $t_{i=i}$. Рассмотрим $PX(t)$ как случайный процесс при $t \in [0, n]$. Через $K(t, \tau), t, \tau \in [0, n]$ обозначим его корреляционнцю функцию, а через $K \in \left\{k_{ij}\right\}$ корреляционную матрицу последовательности X. Предположим, что корреляционная матрица имеет вид, характерный для самоподобного процесса. Определим преобразование случайной последовательности X формулой $Y_i = \left(TPX\right)_i, 0 \le i \le n$, где T - дискретное вейлвет-преобразование в пространстве $S(\Delta, 2, 1)$. Поставим задачу оценки элементов ковариационной матрицы $\tilde{K} = \left\{\tilde{k}_{ij}\right\}, \tilde{k}_{ij} = \operatorname{cov}\left(Y_i, Y_j\right), 0 \le i, j \le n$ по заданной ковариационной матрице $K = \left\{k_{ij}\right\}, k_{ij} = \operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)$. Введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{K} = \left\{\hat{k}_{ij}, 0 \le i, j \le n\right\}, \ \hat{k}_{ij} = \operatorname{cov}\left(\left(PX, \chi_i\right), \left(PX, \chi_j\right)\right) = \int_0^n \int_0^n K(t, \tau)\chi_i(t)\chi_j(\tau)\,dt\,d\tau,$$

где $K(t, \tau) = \operatorname{cov}\left(PX(t), PX(\tau)\right)$.

Корреляционная матрица последовательности случайных величин Y имеет вид $\tilde{K} = \Gamma^{-1}\hat{K}\Gamma^{-1}$, где Γ - матрица Грама вейвлет базиса. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема. Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки $(p \geq 2)$

$$\left|\hat{k}_{ij}^{pp+s}\right| \leq C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{\left(1+\left|j-\frac{i}{2^s}\right|\right)^{2+\alpha}}, \quad \left|\hat{k}_{ij}^{p+sp}\right| \leq C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{\left(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|\right)^{2+\alpha}}$$

Оценка элементов матрицы $\tilde{K}$ вытекает из теоремы. Также из вышеизложенного следует, что матрица $\tilde{K}$ является псевдоразреженной, т.е. в ней достаточное количество малых по модулю элементов.

4. Численный эксперимент по декорреляции временных рядов

Для проведения численного эксперимента были получены последовательности случайных величин, характеризующие сигнал с точки зрения времени обработки пакетов данных в системе.

Сравнение методов декорреляции временных рядов проводилось следующим образом. К исходным последовательностям данных применялось прямое преобразование. Из полученных коэффициентов преобразования составлялись новые последовательности, а затем выполнялось обратное преобразование. В качестве метрики использовалось значение суммы модулей коэффициентов корреляции. Алгоритм вычисления коэффициентов корреляции для временных рядов описан в работе Карташевского И.В. [5].

Результаты, полученные по окончании экспериментов над пятью последовательностями данных представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Сравнение результатов эксперимента с другими видами преобразований

Тип преобразования	1	2	3	4	5
Исходная выборка	208,277	420,396	17,751	35,882	16,007
Преобразование Фурье	22,619	24,799	5,044	8,497	3,805
Вейвлет-преобразование Добеши	22,490	18,204	5,455	7,351	5,532
ДВП на базе сплайнов (m=2)	20,640	30,468	2,377	4,124	3,147
ДВП на базе сплайнов (m=3)	18,707	30,811	2,110	4,009	3,025

5. Заключение

В заключение необходимо сказать, что использование линейных и квадратичных сплайновых вейвлет-функций для декорреляции последовательности сильнокоррелированных случайных величин является потенциально более эффективным, чем некоторые исследуемые в данной работе ортогональные преобразования. Перспективность использования ДВП на базе сплайнов обуславливается его гибкостью, хорошими декоррелирующими свойствами и существованием быстрых алгоритмов вычисления.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность зав. каф. высшй математики ПГУТИ, профессору, д.ф.-м.н. Блатову И.А. за помощь, ценные советы и замечания к работе, а также доценту кафедры теории передачи сигналов ПГУТИ, к.т.н. Карташескому И.В. за предоставленные данных для численных экспериментов.

Литература

[1] Блатов, И.А. Оценка эффективности применения быстрого дискретного сплайнового вейвлет-преобразования для ослабления коррелированности дискретно заданных данных / И.А. Блатов, Ю.А. Герасимова // ВГТУ. – 2015. – №5. – Том 11. - С. 34-36

[2] Blatov, I.A Application of fast discrete wavelet transformation on the basis of spline wavelet for loosening correlation of sequence of data in mass service theory / I.A Blatov, U.A. Gerasimova, I.V. Kartashevskiy // CEUR Workshop Proceedings. – 2015. – V.1490. - P. 242-245

[3] Малла, С. Вейвалеты в обработке сигналов/ Пер. с англ. М.:Мир, 2005

[4] Блатов, И.А. Полуортогональные сплайновые вейвлеты и метод Гадеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн / И.А. Блатов, Н.В. Рогова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. - №5. – Том 53. - С. 727-736

[5] Карташевский, И.В. Расчет коэффициентов корреляции временных интервалов в последовательности событий // Журнал «Электросвязь». – 2012. - №10. - С. 37-39