Геометрия фазовых потоков автономных динамических моделей с сингулярными возмущениями

М.О. Балабаев[1], В.А. Соболев[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В статье рассматриваются автономные сингулярно возмущенные динамические модели с точки зрения дифференциальной геометрии. В работе показано, какую геометрическую интерпретацию можно дать фазовому потоку динамических систем, как стабильность решений модели коррелирует с геометрическими особенностями фазового потока и какой геометрический смысл имеют некоторые объекты, широко используемые при анализе интегральных многообразий автономных динамических моделей с сингулярными возмущениями.

1. Введение

Прикладные задачи в различных отраслях науки и техники описываются автономными динамическими системами с сингулярными возмущениями вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon}\, g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ — медленная и быстрая переменные соответственно, положительный параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ обуславливает малое возмущение модели, а точкой обозначается дифференцирование по времени t.

Здесь и далее мы будем предполагать, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ имеют евклидову метрику, а функции f и g являются однозначно определенными и достаточно гладкими в некоторых областях пространства $\mathbb{R}^{m+n} \times [0, \varepsilon]$.

Перепишем исходную систему в виде

$$\dot{P} = V(P), \qquad (1)$$

где P вектор-столбец неизвестных $\{x, y\}$, а V вектор-столбец правых частей системы.

2. Описание метода

Рассмотрим данную автономную модель с точки зрения кинематики.

Возьмем произвольную точку P_0 фазового пространства. Пусть L - траектория системы, проходящая через эту точку, а P(t) - соответствующая ей параметризация:

$$L = \left\{ P(t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\exists\, t_0 \in \mathbb{R} :\; P(t_0) = P_0.$$

Тогда система (1) определяет вектор мгновенной скорости V для каждой точки фазового пространства $P \in \mathbb{R}^{m+n}$. Этот вектор можно считать однозначно определенным точкой P; кроме того, он является касательным вектором к L в точке P.

Рассмотрим вектор $A(P)$, определяемый равенством

$$A(P) = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Этот вектор определяет мгновенное ускорение движущейся точки $P(t)$ и является суммой двух составляющих — векторов тангенциального и нормального ускорения, направленных по касательной и нормали к траектории соответственно. Стоит отметить, что вектор нормального ускорения определяет изменение направления движения, в то время как вектор тангенциального ускорения — изменение модуля скорости.

В нашем случае будет удобно вычислять проекции тангенциального и нормального ускорения, опираясь на векторы мгновенной скорости и мгновенного ускорения по формулам:

$$A_\tau = \frac{(V, A)}{||V||}, \tag{2}$$

$$A_n = \frac{||V \wedge A||}{||V||}, \tag{3}$$

где символом «$\wedge$» обозначено внешнее произведение, а норма порождена внутренним произведением пространства $\mathbb{R}^{m+n}$.

Изменение скорости движения точки фактически определяется углом между векторами мгновенной скорости и мгновенного ускорения, то есть зависит исключительно от знака скалярного произведения (V, A). В случае $(V, A) > 0$ соответствующая точка увеличивает скорость своего движения, а в случае $(V, A) < 0$ — уменьшает. Иными словами, фазы быстрого и медленного движения в общем случае можно различать, опираясь на знак проекции тангенциального ускорения A_τ, которая вычисляется по формуле (2).

Рассмотрим отдельно ситуацию, когда проекция нормального ускорения A_n близка к нулю. В этом случае угол между векторами мгновенного ускорения и мгновенной скорости очень мал, что характерно для прямолинейных участков движения.

Напомним, что кривизна траектории может быть вычислена [1, 2] через вектора мгновенной скорости и мгновенного ускорения по формуле

$$k_1 = \frac{||V \wedge A||}{||V||^3},$$

то есть она лишь на положительный множитель отличается от проекции вектора нормального ускорения (3).

Иными словами, в точках вырождения кривизны траектории соответствующие векторы мгновенной скорости V и мгновенного ускорения A коллинеарны.

Рассмотрим вектор мгновенного рывка $J(P)$, определяемый равенством

$$J(P) = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Тогда кручение траектории в каждой ее точке может быть найдено по формуле [1, 2]:

$$k_2 = \frac{(V \wedge A \wedge J)}{||V \wedge A||^2}.$$

В контексте кинематики, точки вырождения рывка являются критическими в том смысле, что в них возможно резкое изменение поведения функции $A(P)$. Это означает, что переход между фазами быстрого и медленного движения осуществляется именно в тех точках, где $J(P) = 0$.

Таким образом, можно утверждать [2], что смена фазы движения возможна только в точках вырождения кручения соответствующих траекторий.

Многим объектам, используемым при работе с интегральными многообразиями наряду с их классическими определениями [3, 4], можно дать равносильные определения [2] с точки зрения дифференциальной геометрии.

Приведем ниже несколько таких определений для случая трехмерного пространства.

Определение 1. Инвариантное многообразие называется *притягивающим*, если в каждой его точке кручение соответствующей траектории отрицательно.

Определение 2. Инвариантное многообразие называется *отталкивающим*, если в каждой его точке кручение соответствующей траектории положительно.

Опираясь на эти два определения, можно говорить о кривой срыва как об инвариантном многообразии размерности один, имеющем интерпретацию в терминах дифференциальной геометрии.

Определение 3. *Кривой срыва* называется множество точек медленной поверхности, в которых соответствующие траектории уплощаются.

В случае более высоких размерностей фазового пространства аналогичные определения можно ввести, основываясь на понятии кривизны высших порядков с учетом минимально возможной размерности пространства, в которое можно вложить траекторию.

Введем в рассмотрение гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ вида

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \left|\dot{P} \wedge \ddot{P} \wedge \cdots \wedge \overset{(m+n)}{P}\right| \\ &= \left|V \wedge \dot{V} \wedge \ddot{V} \wedge \cdots \wedge \overset{(m+n-1)}{V}\right|,\end{aligned}$$

где символом «$\wedge$» обозначено внешнее произведение.

Как было доказано в работе [1, стр.185], множество точек, определяемое выражением

$$\varphi(P) = 0,$$

является инвариантным многообразием размерности $m + n - 1$, лежащим в некоторой окрестности медленного многообразия исходной системы.

Определение 4. *Кривизной потока* автономной динамической системы в некоторой точке соответствующего фазового пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ называется старшая кривизна порядка $m + n - 1$ траектории, проходящей через эту точку.

В работе [5] Ж.Г. Дарбу показал, что многообразие, определяемое вырождением старшей кривизны, является инвариантной поверхностью исходной динамической системы. А в силу того, что производная Ли вырождается $L_P(\varphi) = 0$, очевиден тот факт, что φ является первым интегралом системы.

3. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта 16-41-630529.

4. Литература

[1] Ginoux, J. M. Differential geometry applied to dynamical systems / J. M. Ginoux – Singapore: World Scientific, 2009. – Vol. 3.
[2] Ginoux, J.M. Dynamical Systems Stability and Attractor Structure using Acceleration / J.M. Ginoux, B. Rossetto // International Journal of Bifurcations and Chaos, 2005.
[3] Соболев В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина – М.: Физматлит, 2010. – 320 с.
[4] Shchepakina, E.A. Introduction to system order reduction methods with applications / E.A. Shchepakina, V.A. Sobolev, M.P. Moitell // Springer Lecture Notes in Math. – 2014. – Vol. 2114. – P. 201.
[5] Darboux, G. Bull. Sci. Math. – 1978. – Vol. 2(2). – P. 60-96, 123-143, 151-200.

Phase flows geometry of autonomous dynamical models with singular perturbations

M.O. Balabaev[1], V.A. Sobolev[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. In the framework of this paper we consider autonomous singularly perturbed dynamical models from the differential geometry point of view. We show the geometric interpretation of dynamical system phase flow; the correlation of stability solutions with the geometric picularities of the phase flow; geometrical meaning of various objects that are widely used in the analysis of integral manifolds of autonomous dynamical models with singular perturbations.