ФРЕЙМЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА БЕЗ ФАЗЫ

А.А. Кулешова

АО «РКЦ «Прогресс», Самара, Россия

Поиск быстрых алгоритмов для восстановления сигнала без фазы актуален в настоящее время. Алгоритмы восстановления важны в обработке разнообразных сигналов, в особенности в технологии распознавания речи, в томографии. Главное свойство фреймов, которое делает их настолько полезными в прикладных задачах – их избыточность. Хорошо выбранный фрейм может обеспечить численную устойчивость для восстановления сигнала и получение важных характеристик сигнала.

Ключевые слова: фрейм, восстановление сигнала без фаз, равномерные фреймы.

Введение

Поиск алгоритмов для восстановления сигналов без фазы является актуальной задачей. В настоящее время выпущено большое количество статей по поиску алгоритмов решения этой задачи. Недавно была показана теоретическая возможность решения этой задачи [4]. Показано, что семейство фреймов восстанавливает сигнал по абсолютному значению фреймовых коэффициентов в полиномиальное время [1].

Фреймы

Определение 1: Семейство векторов $\{f_i\}_{i=1}^N$ называется фреймом Гильбертового пространства H существуют такие константы 0 < A ≤ B < ∞, такие что для всех x ∈ H выполняются следующие неравенства:

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i\in I} \left|\langle x, f_i\rangle\right|^2 \le B\|x\|^2.$$

A и B называются границами фрейма. Наибольшая из нижних границ называется оптимальной нижней границей, а наименьшая из верхних границ --- оптимальной верхней границей. Если A=B, то фрейм называется A-жестким, а если A=B=1, то фреймом Парсеваля-Стеклова.

Числа $\left|\langle x, f_i\rangle\right|_{i\in I}$ называются фреймовыми коэффициентами.

Если все элементы фрейма имеют одинаковую норму, то такие фреймы называются равномерными.

Возьмем фрейм $\{f_i\}_{i\in I}$, его оператор анализа определяется так:

$$T : H \to l^2(I), T(x) = \{\langle x, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

Оператор синтеза – сопряженный оператор T*, который удовлетворяет:

$$T^*: l^2(I) \to H, T^*(c) = \sum_{i \in I} c_i f_i .$$

Фреймовый оператор – положительный, самосопряженный обратимый оператор $S = T^* T : H \to H$. Он обеспечивает точную формулу для восстановления:

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle S^{-1} f_i .$$

Определение 2: Семейство векторов $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ является равномерным равноугольным жётким фреймом, если существует c>0, такое что для любой пары векторов фрейма f_j и f_k, j≠k, мы имеем:

$$\langle |f_j, f_k| \rangle = c.$$

Известно, что есть верхняя граница для некоторого числа векторов в равномерном равноугольном жёстком фрейме $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ на N-мерном Гильбертовом пространстве H. В вещественном случае это $M \le \frac{N(N+1)}{2}$, в комплексном случае - $M \le N^2$ ([10], [3]). Построение максимального числа векторов для равномерного равноугольного жесткого фрейма очень сложная и нерешенная задача в теории фреймов.

Определение 3: Пусть H – вещественное или комплексное Гильбертово пространство. Говорят, что семейство векторов $\{e_k^{(j)}\} \in H, \quad k \in K = \{1,2,.., N\}, \quad j \in J = \{1,2,.., M\}$ является формой M взаимно несмещенных базисов, если для каждого $j, j' \in J$ и $k, k' \in K$ величины внутреннего произведения между $e_k^{(j)}$ и $e_{k'}^{(j')}$ дают

$$\left| \left\langle e_k^{(j)}, e_{k'}^{(j')} \right\rangle \right| = \delta_{k,k'} \delta_{j,j'} + \frac{1}{\sqrt{N}} (1 - \delta_{j,j'}),$$

где символ Кронекера $\delta_{j,j'} = 1$ и $\delta_{j,j'} = 0$ если $j \ne j'$.

Максимальное число M=N+1 – это количество взаимно несмещенных базисов $\{e_k^j : 1 \le j \le M, 1 \le k \le N\}$ в N-мерном Гильбертовом пространстве H [8, 3]. Построение максимального числа взаимно несмещённых базисов для Гильбертовых пространств произвольных размерностей – также сложная и нерешённая задача в теории фреймов. Однако, это возможно, если мощность N – простое число в комплексном случае и мощность N равна 4 в вещественном случае [5, 6].

Примером с взаимно несмещённым базисом является радиоимпульс с дискретной частотной модуляцией.

Предложение 1: Пусть N – простое число, w – первообразный корень из единицы степени N и пусть $\{e_k\}_{k=1}^{N}$ - канонический базис в C^N.

Тогда определим $e_k^{(1)} \equiv e_k$ и для каждого j∈{2, …, N+1} имеем:

$$e_k^{(j)} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \omega^{-(j-1)l^2+kl} e_l .$$

Это определяет семейство (N+1)-взаимно несмещённых базисов, которые вызываются радиоимпульсами с дискретной частотной модуляцией [7,11].

Фреймы общего положения

В работе [1] показывается, что фреймы общего положения восстанавливают сигналы без фаз и это восстановление достигается за полиномиальное время.

Рассмотрим M - нелинейное отображение, переводящее вектор в абсолютное значение его фреймовых коэффициентов:

$$\mathrm{M}: H \to l^2(I), \mathrm{M}(x) = \left\{ \left| \left\langle x, f_i \right\rangle \right| \right\}_{i \in I}, I = \{1,.., M\}.$$

Если необходимо связать M с некоторым фреймом, то запишем: M^F. Пусть $H_r = H / \sim$ - фактор-пространство, полученное отождествлением двух векторов, если они отличаются постоянным фазовым коэффициентом. Таким образом, x~y означает, что существует константа c:|c|=1 , такая что y=cx.

Для вещественных Гильбертовых пространств $c = \pm 1$, тогда $H_r = H / \{\pm 1\}$. Для комплексных гильбертовых пространств $c = e^{i\theta}$, тогда $H_r = H / \{T^1\}$, где T^1- окружность единичного радиуса на комплексной плоскости. В квантовой механике эти проективные лучи определяют квантовые состояния [12]. Нелинейное отображение M на H_r действует так:

$$\mathrm{M}: H_r \to l^2(I), \mathrm{M}(\hat{x}) = \left\{ \left| \left\langle x, f_i \right\rangle \right| \right\}_{i \in I}, x \in \hat{x}.$$

Рассмотрим два случая: вещественный и комплексный.

Если $H = R^N$, множество I состоит из M-элементов, I={1, 2, …, M} . Тогда $l^2(I) \cong R^M$. Множество Gr(N, M; R) – это множество N-мерных линейных подпространств в R^M, которое имеет структуру N(M-N)-мерного множества.

Gr(N, M; R) называется множеством Грассмана. Фреймовое расслоение F(N, M; R) - это группа GL(N, M)-пучок над Gr(N, M), определенное следующим образом: расслоение F(N, M; R) над точкой GL(N, M) соответствует линейному N-мерному подпространству $W \subset R^M$, которое является множеством всех возможных базисов для W.

Для фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ из R^N оператор анализа удовлетворяет:

$$T: R^N \to R^M, T(x) = \sum_{k=1}^{M} \langle x, f_i \rangle e_k ,$$

где $e_k = \{e_1,..., e_M\}$ – канонический базис в R^M .

Через W обозначим ранг аналитического отображения $T(R^N)$. W будет являться N-мерным линейным подпространством в R^M и оно будет соответствовать точке на множестве Грассмана Gr(N, M).

Рассматриваемое нелинейное отображение в вещественном случае:

$$\mathrm{M}^F : R^N / \{\pm 1\} \to R^M, \quad \mathrm{M}^F(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{M} \langle x, f_k \rangle e_k, \ x \in \hat{x}.$$

Два фрейма называются эквивалентными, если есть обратимый оператор T на H, такой что $\mathrm{T}(\mathrm{f_i}) = \mathrm{g_i}$ для всех i∈I. Известно, что два фрейма эквивалентны, тогда и только тогда, когда ранги их сопряженных операторов анализа совпадают [2, 9]. Получаем, что M фреймов на R^N параметризованы расслоением пространства F(N, M; R), GL(N, R) -пучок над Gr(N, M).

В [4] показано, что для двух эквивалентных фреймов F и G (ранги их коэффициентов совпадают) M^F инъективно тогда и только тогда, когда инъективно M^G. Отсюда следует, что для двух фреймов, соответствующих двум точкам в одном расслоении F(N, M; R), их нелинейное отображение может являться инъективным, либо нет.

В комплексном случае $H = C^N$ получается почти тоже самое. Пусть C^N - Гильбертово пространство. Для M-элементов фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ в C^N оператор анализа определяется также, как и для вещественного случая:

$$T : R^N \to R^M, T(x) = \sum_{k=1}^{M} \langle x, f_i \rangle e_k.$$

Скалярное произведение - $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{y_k}.$

Ранг коэффициентов, то есть ранг оператора анализа, есть комплексное N-мерное подпространство в C^M, которое обозначим снова W. Таким образом, фрейм определяет точку комплексного Грассманиана Gr(N,M)C, параметризованного N-мерным комплексным подпространством в C^N. Как и в вещественном случае, множество M-фреймов в C^N параметризовано точками расслоения F(N, M;C), GL(N, C) - пучок над Gr(N, M)C. Нелинейное отображение: $\mathrm{M}^F : R^N / \{T^1\} \to C^M$, $\mathrm{M}^F(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{M} \langle x, f_k \rangle e_k, \ x \in \hat{x},$ где два вектора $x, y \in \hat{x}$, если существует такая константа $c \in C : |c| = 1$, такой что y=cx.

Основные результаты из [4]:

Теорема 1: Справедливо:

(Вещественный случай) Если M≥2N-1, то для фрейма общего положения F, нелинейное отображение M инъективно.

(Комплексный случай) Если M≥4N-2, то для фреймы общего положения F, нелинейное отображение M инъективно.

Комментарий: В обоих случаях, в вещественном и комплексном, в Теореме 1 термин "фрейм общего положения" означает следующее: если мы рассматриваем Грассманиан Gr(N, M) как вещественное алгебраическое многообразие, то существует открытое по Зарискому множество U⊂Gr(N,M), такое, что утверждение справедливо для всех фреймов, у которых ассоциированное линейное подпространство соответствует точке на U.

В вещественном случае, если M ≥ 2N - 1, невозможно подобрать такой фрейм $\{f_i\}_{i=1}^{M}$, который удовлетворял бы Теореме 1 (см [4]). Неизвестна точно минимальная граница для комплексного случая. Также, в вещественном случае существует простой прямой метод для проверки инъективности отображения M для соответствующего фрейма [4].

Теорема 2: Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{M}$ фрейм в R^N. Следующие утверждения эквиваленты:

(1) отображение $\mathrm{M}: H_r \to l^2(I)$ – инъективно

(2) для каждого подмножества $\varphi \subset \{1,2,..., M\}$ либо $\{f_i\}_{i\in\varphi}$, либо $\{f_i\}_{i\in\varphi^C}$ полно в R^N ($\mathbf{R^N}$).

Следствие 1: Если F это M–элементный фрейм в R^N с M ≥ 2N - 1 и у F каждые N-элементов фрейма линейно независимы, то оператор $M: H_r \to l^2(I)$ - инъективен.

В [1] показывается, что фрейм общего положения будет восстанавливать сигнал без фазы за полиномиальное число шагов.

Пусть H – фиксированное N-мерное векторное пространство (вещественное или комплексное), пусть $\{e_1,.., e_M\}$ – ортонормированный базис для H.

Теорема 3:

(а) Если $H \in R^N$, $M \geq \frac{N(N+1)}{2}$ и $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ – фрейм общего положения. Тогда вектор x∊H может быть восстановлен (с точностью до знака) из множества $\left\{ \left| \langle x, f_i \rangle \right| \right\}_{i=1}^{N}$ по абсолютной величине фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(\mathrm{O(N^6)})$.

(б) Если $H \in C^N$ – комплексное, $M \geq N^2$ и $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ – фрейм общего положения. Тогда вектор x ϵ H может быть восстановлен (с точностью умножения на корень из единицы) из множества $\left\{ \left| \langle x, f_i \rangle \right| \right\}_{i=1}^{M}$ по абсолютной величине фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(\mathrm{O(N^6)})$.

Заключение

Восстановление сигнала возможно даже в случае отсутствия фазовой информации, которая часто теряется в ходе обработки сигнала. Примерами таких сигналов без фазы являются процессы передачи и обработки изображений. Восстановление потерянной информации необходимо для последующей работы с данными. При потере части информации вышеописанные математические методы и оценки дают информацию о том, что сигнал возможно восстановить по модулям фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(O(N^6))$.

Необходима дальнейшая детализация для фреймов общего положения.

Литература

1. R. Balan. Fast algorithems for signal reconstruction without phase / R. Balan , B. G. Bodmann, P. G. Casazza, D. Edidin // Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701 (2007) 670111920-670111932 2. R. Balan. Equivalence relations and distances between Hilbert frames / R. Balan // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999 – 127(8):2353–2366.
2. R. Balan. Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients, preprint / R. Balan, B. G. Bodman, P. G. Casazza and D. Edidin R. Balan. On signal reconstruction without phase / R. Balan, P. Casazza, D. Edidin // Appl.Comput.Harmon.Anal. 20 –2006 – P. 345–356.
3. A.R. Calderbank. Z4-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets / A. R. Calderbank, P. J. Cameron, W. M. Kantor, and J. J. Seidel // Proc. London Math. Soc. (3) 75 –1997 – no. 2 – P. 436–480.
4. P. J. Cameron. Quadratic forms over GF(2) / P. J. Cameron , J. J. Seidel // Indag. Math. 35 – 1973 – P. 1–8.
5. P. G. Casazza. Fourier transforms of finite chirps / P. G. Casazza , M. Fickus // EURASIP J. Appl. Signal Process, Frames and overcomplete representations in signal processing, communications, and information theory, Art.ID 70204 – 2006 – P. 1-7.
6. P. Delsarte. Spherical codes and designs, Geometriae Dedicata 6 / P. Delsarte , J. M. Goethals, J. J. Seidel // no.3 – 1977 – P. 363–388.
7. D. Han. Frames, bases and group representations / D. Han , D. Larson // Memoirs American Math. Soc. 147 – 2000 – no. 697.
8. R. Holmes. Optimal frames for erasures / R. Holmes , V. I. Paulsen // Lin. Alg. Appl. 377 – 2004 – P. 31–51.
9. S. D. Howard. The finite Heisenberg-Weyl groups in radar and communications / S. D. Howard , A. R. Calderbank, W. Moran // EURASIP J. Appl. Signal Process, no. Frames and overcomplete representations in signal processing, communications, and information theory, Art. ID 85685 – 2006 – P. 1-12.
10. R. F. Streater. PCT, Spin and Statistics and All That / R. F. Streater , A. S. Wightman // Princeton University Press, Landmarks in Mathematics and Physics, –2000.