

Формирование заданного распределения в ближней зоне дифракции на основе разложения по собственным функциям ограниченного оператора распространения

С.Н. Хонина^{а,б}, М.С. Кириленко^а, С.Г. Волотовский^б

^а Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

^б Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрено решение обратной задачи дифракции для 1D ограниченного (в пространственной и спектральной областях) оператора распространения оптического сигнала в свободном пространстве в ближней зоне (на расстояние нескольких длин волн). Расстояние распространения пучка и область ограничения пространственных частот являются параметрами оператора и существенно меняют набор собственных чисел и функций, определяя количество степеней свободы для аппроксимации заданного распределения. Выполнен расчет входных сигналов, обеспечивающих формирование заданных распределений на различных расстояниях

Ключевые слова: 1D ограниченный оператор распространения; ближняя зона дифракции; собственные функции; аппроксимация сигнала; решение обратной задачи

1. Введение

Из-за явления дифракции излучение, проходящее через отверстие субволнового размера, рассеивается во всех направлениях. Чем меньше размер отверстия, тем сильнее рассеивается свет и тем больше становится размер светового пучка, прошедшего даже небольшое расстояние от отверстия. Таким образом, дифракция накладывает фундаментальное ограничение на достижимое оптическое разрешение [1]. С момента осознания этого факта было проделано множество попыток по преодолению дифракционного предела, что могло бы обеспечить визуализацию деталей, размеры которых меньше половины длины волны. Высокий интерес связан с тем, что область применения сверхразрешения вовсе не ограничивается улучшением качества изображений, но уже показана эффективность в уплотнении записи на оптических носителях информации, в литографии и нано-структурировании, оптическом манипулировании вплоть до атомных размеров и многих других областях.

Одним из направлений, эффективно используемых для достижения сверхразрешения, является оптика ближнего поля (near-field optics) [2-4]. Ближнепольная оптика изучает поля в непосредственной близости от источника излучения или поверхности воздействия, что предполагает рассмотрение затухающих (нераспространяющихся) волн [5]. В этом случае не имеется каких-либо ограничений на размер светового пятна – локализация лазерного излучения может быть сколь угодно малой, хотя, как было показано в работах [6, 7], существенно зависит от размера деталей рельефа поверхности. При этом важную роль начинает играть продольная компонента электрического поля [8-10], детектирование которой представляет определенную сложность [11-14].

Другим направлением, имеющим целью преодоление дифракционного предела вне зоны затухающих волн (на расстоянии более длины волны), связано с понятием суперосциллирующего поля [15-17]. Была изучена возможность сверхразрешения в дальней зоне с использованием гиперлинз и металинз [18], а также оптических собственных мод [19,20].

В данной работе рассматривается формирование заданных распределений на расстояниях порядка длины волны от входной плоскости на основе теории коммуникационных мод [21, 22]. Для этого мы рассматриваем собственные функции оператора распространения в ближней зоне и используем их для аппроксимации заданного распределения [23, 24]. Ограниченность оператора распространения как в пространственной, так и спектральной областях приводит к необходимости численного расчета [25-28] собственных функций. В частности, в работе [28] было рассмотрено ограниченное одномерное преобразование, соответствующее оператору распространения оптических полей в свободном пространстве, и основанное на разложении по плоским волнам. Было показано, что такой оператор является нормальным, поэтому набор его собственных функций ортогонален и, следовательно, может быть использован для аппроксимации некоторого заданного распределения. При этом расстояние распространения пучка и область ограничения пространственных частот являются параметрами оператора и существенно меняют набор собственных чисел и функций, определяя количество степеней свободы для аппроксимации заданного распределения.

2. Вихревые пучки Эрмита-Гаусса

Рассмотрим распространение одномерных световых волн в свободном пространстве на основе скалярной теории дифракции. В соответствии с данной теорией, уравнение распространения, основанное на разложении по базису плоских волн, имеет следующий вид [29]:

$$F(u, z) = \frac{1}{\lambda} \int_{-x_0}^{x_0} f(x) \left\{ \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1-\alpha^2}\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha(u-x)\right] d\alpha \right\} dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ - входное поле, ограниченное в пространственной области интервалом $[-x_0, x_0]$ и в спектральной области интервалом $[-\alpha_0, \alpha_0]$, λ - длина волны излучения, z - расстояние распространения, $F(u)$ - выходное поле.

Перепишем оператор (1) в виде:

$$F(u, z) = \int_{-x_0}^{x_0} f(x) K(u, x, z) dx, \quad (2)$$

$$\text{где } K(u, x, z) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp\left(i \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1-\alpha^2}\right) \exp\left[i \frac{2\pi \alpha}{\lambda} (u-x)\right] d\alpha. \quad (3)$$

Интеграл (3) представляет собой обратное преобразование Фурье в ограниченных пределах. Для случая бесконечных пределов существует аналитическая форма записи данного интеграла через функцию Ханкеля первого рода [30]. При $|\alpha| > 1$ волны являются затухающими и не распространяются в свободном пространстве на расстояние более трети длины волны [31].

В дискретном виде оператор (2) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{K}_z \mathbf{f}, \quad (4)$$

где \mathbf{K}_z - матрица, элементы которой представляют собой значения интеграла (3) в дискретных точках координат x и u , а \mathbf{f} и \mathbf{F}_z - входной и выходной вектора, соответственно.

Численное решение задачи на собственные значения позволяет получить набор собственных векторов матрицы \mathbf{K}_z :

$$\mathbf{K}_z \Psi_n = b_{n,z} \Psi_n, \quad (5)$$

где Ψ_n - собственные вектора, $b_{n,z}$ - собственные значения.

В общем случае собственные вектора являются комплексными.

Имея набор собственных векторов можно получить на их основе аппроксимацию некоторого заданного сигнала на расстоянии z :

$$F(u, z) \approx F_z(u) = \sum_{n=0}^N c_n \Psi_{n,z}(u), \quad (6)$$

$$\text{где } \Psi_{n,z}(u) = b_n(z) \Psi_n(u), \quad (7)$$

$$c_n = \int_{-u_0}^{u_0} F(u, z) \Psi_{n,z}^*(u) du. \quad (8)$$

Решение обратной задачи дифракции в этом случае, т.е. входное распределение, формирующее заданный сигнал (6), будет выглядеть следующим образом:

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{b_n(z)} \Psi_n(x). \quad (9)$$

Из (9) очевидно, что использование в аппроксимации собственных функций с собственными значениями, близкими к нулю, нецелесообразно.

3. Расчёт собственных значений и функций

Решение задачи на поиск собственных значений и собственных функций было выполнено для различных значений параметров при $\lambda = 1 \mu\text{m}$. На рис. 1 показаны графики полученных собственных значений. Видно, что при расстояниях меньше длины волны и при учете затухающих волн $|\alpha| > 1$ (рис. 1а) график собственных значений имеет классический вид, близкий к ступенчатой функции. Если значительно увеличить расстояние при учете только распространяющихся волн $|\alpha| < 1$ (рис. 1б), то собственных значений, близких к единице становится значительно меньше. Увеличить их количество можно увеличением интервала в объектной области (рис. 1в), но это не гарантирует улучшение разрешения.

Графики 15-ой собственной функции для рассмотренных выше случаев изображены на рисунке 2. Так как функции в общем случае комплексные, синим цветом показана действительная часть, а красным – мнимая. Из рисунка видно, что пятнадцатая собственная функция в первом и третьем случаях имеет классический вид, а во втором – вырожденный. Заметим также, что размер осцилляций функции в третьем случае в 10 раз больше, что связано с десятикратным увеличением интервала в объектной области. В этом случае потребуется соответствующее увеличение числа отсчетов.

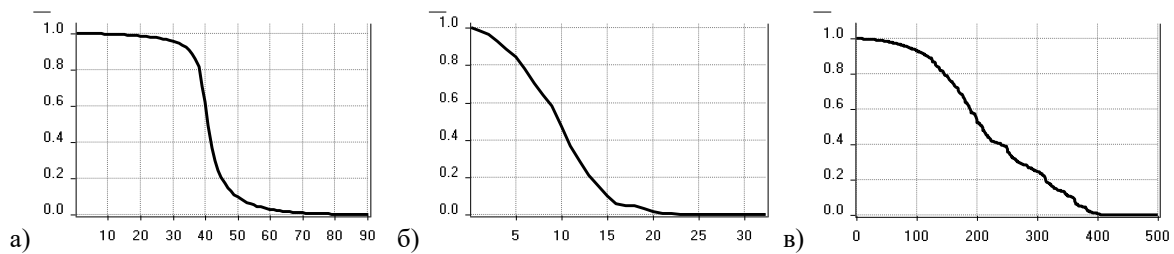


Рис. 1. График модулей собственных значений для (а) $x_0 = 10\lambda$, $z = 0,5\lambda$, $\alpha_0 = 10$, (б) $x_0 = 10\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$, (в) $x_0 = 100\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$.

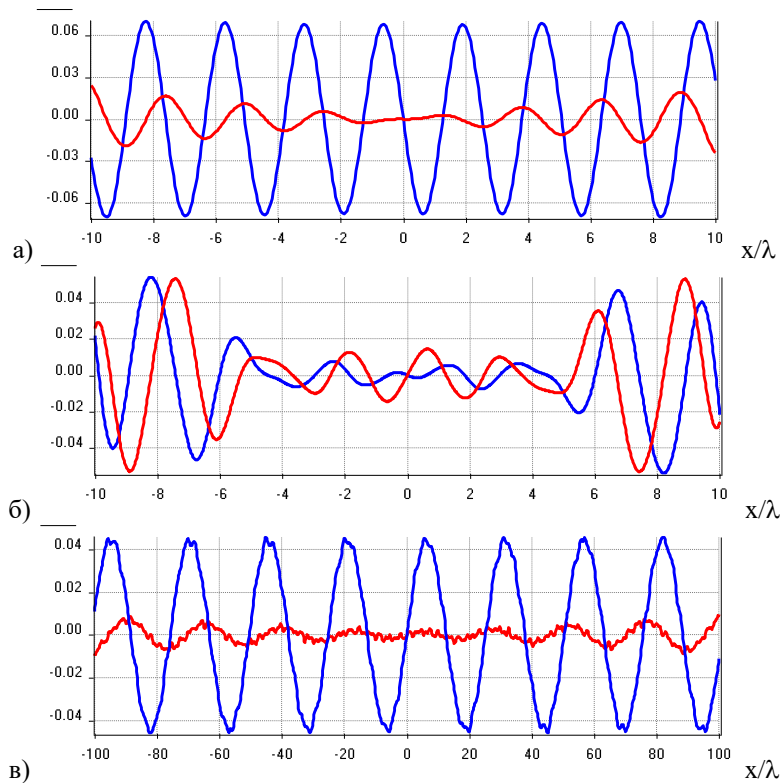


Рис. 2. Пятнадцатая собственная функция (действительная часть - синий цвет, мнимая – красный цвет) для (а) $x_0 = 10\lambda$, $z = 0,5\lambda$, $\alpha_0 = 10$, (б) $x_0 = 10\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$, (в) $x_0 = 100\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$.

4. Аппроксимация заданного сигнала и решение обратной задачи

Используя выражения (6)-(8) можно выполнить аппроксимацию некоторого заданного сигнала на основе рассчитанных собственных функций. После получения коэффициентов аппроксимации (8) с использованием (9) строится входное поле, т.е. решается обратная задача.

На рис. 3 показаны результаты аппроксимации треугольного сигнала шириной 20λ в рассмотренных выше трех ситуациях, а также приведены соответствующие им входные распределения.

Как видно из рис. 3, при условии, что сигнал не содержит субволновых деталей, предложенный подход позволяет эффективно решить поставленную задачу. Заметим, что в данном случае при распространении сигнала на расстояние менее длины волны (рис. 3а) его структура почти не меняется. Чтобы сформировать заданное распределение на расстоянии нескольких длин волн от входной плоскости (рис. 3б, 3в), нужно иметь более сложный входной сигнал, причем в этом случае важную роль начинает играть структура фазы.

При необходимости создать распределение, имеющее детали существенно субволнового размера, т.е. решить задачу сверхразрешения, ситуация становится значительно сложнее. В частности, можно попробовать сформировать световое пятно в 5 раз меньше дифракционного предела (который равен $0,5\lambda$) на некотором расстоянии от входной плоскости.

На рис. 4 показаны результаты аппроксимации прямоугольного сигнала шириной $0,1\lambda$ в рассмотренных выше трех ситуациях. А также показаны соответствующие входные распределения.

Как видно из рис. 4, довольно просто можно создать сигнал шириной в несколько раз меньше дифракционного предела в ближней зоне дифракции при участии затухающих волн (рис. 4а). При увеличении расстояния до нескольких длин волн эта задача существенно усложняется (рис. 4б), причем для формирования даже грубой аппроксимации требуется очень сложное входное распределение. Увеличение размера объектной плоскости (рис. 4в) позволяет уменьшить погрешность аппроксимации, но не упрощает вид входного распределения.

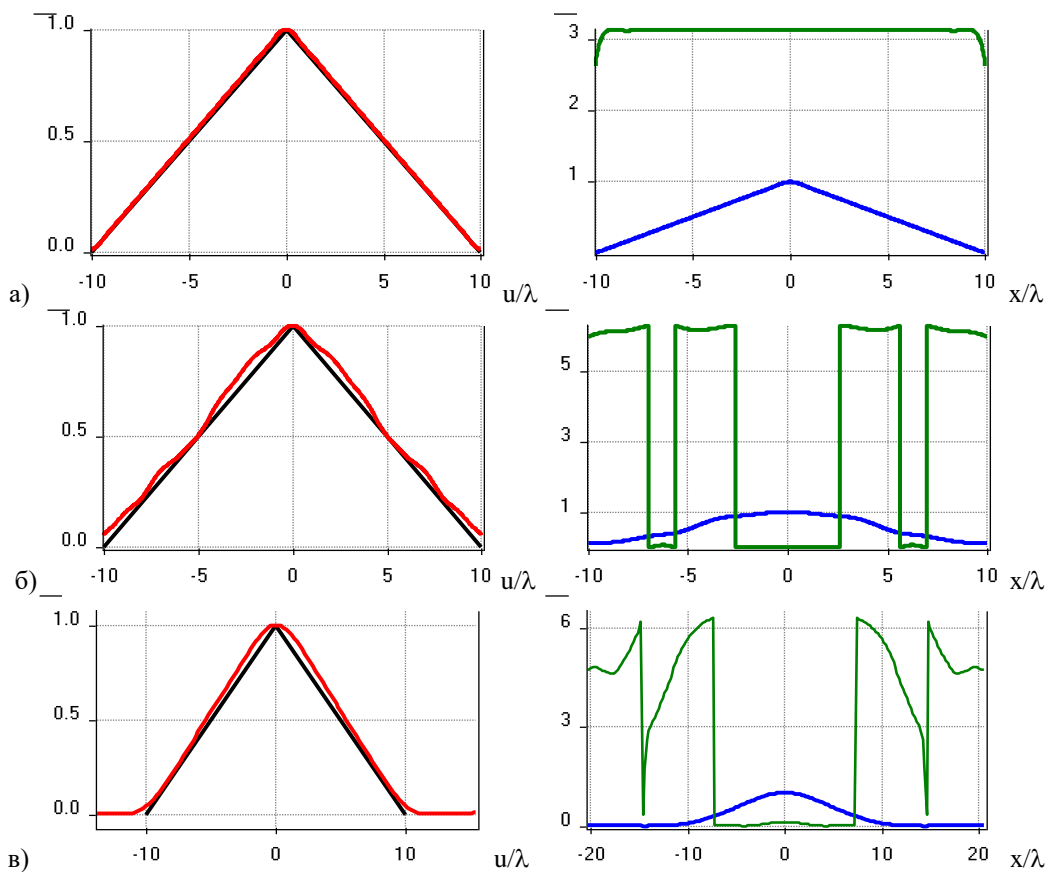


Рис. 3. Аппроксимации (красный цвет) треугольного сигнала шириной 20λ (черный цвет), а также соответствующие входные распределения (амплитуда - синий цвет, фаза - зеленый) для (а) $x_0 = 10\lambda$, $z = 0,5\lambda$, $\alpha_0 = 10$ (ско=0,3%), (б) $x_0 = 10\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$ (ско=2,8%), (в) $x_0 = 100\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$ (ско=2,5%).

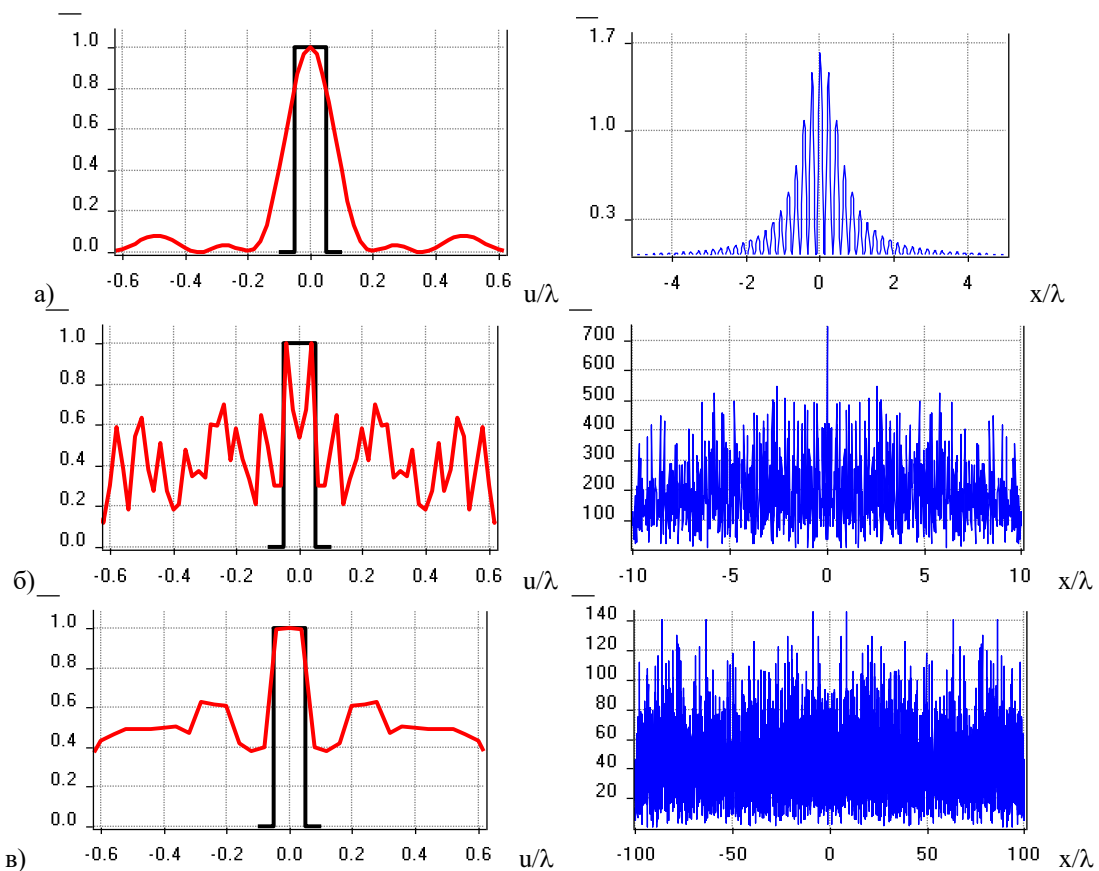


Рис. 4. Аппроксимации (красный цвет) прямоугольного сигнала шириной $0,1\lambda$ (черный цвет), а также соответствующие входные распределения (синий цвет) для (а) $x_0 = 10\lambda$, $z = 0,5\lambda$, $\alpha_0 = 10$, (б) $x_0 = 10\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$, (в) $x_0 = 100\lambda$, $z = 20\lambda$, $\alpha_0 = 1$.

5. Заключение

В работе рассмотрено решение обратной задачи дифракции для 1D ограниченного как в пространственной, так и спектральной областях оператора распространения оптического сигнала в свободном пространстве. Оператор построен на разложении по плоским волнам, но из-за пространственно-частотных ограничений собственные функции такого оператора необходимо рассчитывать численно. Выполнен расчет собственных значений и собственных функций оператора в ближней зоне (расстояние порядка нескольких длин волн). При этом расстояние распространения пучка и область ограничения пространственных частот являются параметрами оператора и существенно меняют набор собственных чисел и функций, определяя количество степеней свободы для аппроксимации заданного распределения. Выполнен расчет входных сигналов, обеспечивающих формирование заданных распределений на различных расстояниях. Показана эффективность предложенного алгоритма решения обратной задачи дифракции для сигналов, не содержащих субволновых деталей. При необходимости сфокусировать излучение в пятно, размер которого в несколько раз меньше дифракционного предела, задача легко решается при участии затухающих волн.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-07-00638.

Литература

- [1] Lord Rayleigh. On the theory of optical images with special reference to the optical microscope / Lord Rayleigh // *Phil. Mag.* – 1896. - Vol. 5(42). - P. 167-195.
- [2] Paesler, M.A. *Near Field Optics: Theory, Instrumentation and Applications* / M. A. Paesler and P. J. Moyer - New York: Wiley Interscience, 1996.
- [3] Pohl, D. W. Optics at the nanometre scale / D. W. Pohl // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* – 2004. - Vol. 362. – P. 701-717.
- [4] Novotny, L. *The History of Near-field Optics* / L. Novotny // *Progress in Optics*, E. Wolf (ed.). Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2007 - Vol. 50, Ch. 5. - P.137-184.
- [5] Khonina, S.N. Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalyov, S.G. Volotovskiy // *Optical Memory and Neural Networks* (Allerton Press) – 2014. – Vol. 23(2). – P. 50-73.
- [6] Degtyarev, S.A. Singular laser beams nanofocusing with dielectric nanostructures: theoretical investigation / S.A. Degtyarev, A.P. Porfirev, A.V. Ustinov, and S.N. Khonina // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2016. - Vol. 33(12). – P. 2480-2485.
- [7] Khonina, S.N. Very compact focal spot in the near-field of the fractional axicon / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // *Optics communications*. – 2017. - V. 391. -P. 24-29.
- [8] Jia, B. Direct observation of a pure focused evanescent field of a high numerical aperture objective lens by scanning near-field optical microscopy / B. Jia, X. Gan and M. Gu // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – P. 86131110.
- [9] Khonina, S.N. Experimental demonstration of the generation of the longitudinal E-field component on the optical axis with high-numerical-aperture binary axicons illuminated by linearly and circularly polarized beams / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, S.V. Alferov, D.A. Savelyev, J. Laakkanen, J. Turunen // *Journal of Optics*. – 2013. – Vol. 15. – P. 085704 (9pp).
- [10] Khonina, S.N. Strengthening the longitudinal component of the sharply focused electric field by means of higher-order laser beams / S.N. Khonina, S.V. Alferov, S.V. Karpeev // *Optics Letters*, 38(17), 3223-3226 (2013)
- [11] Novotny, L. Longitudinal field modes probed by single molecules / L. Novotny, M. R. Beversluis, K. S. Youngworth, and T. G. Brown // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 86. – P. 5251 – 5254.
- [12] Bouhelier, A. Near-field scattering of longitudinal fields / A. Bouhelier, M. R. Beversluis, and L. Novotny // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 82. – P. 4596 – 4598.
- [13] Хонина, С.Н. Исследование поляризационной чувствительности ближнепольного микроскопа с использованием бинарной фазовой пластины / С.Н. Хонина, С.В. Алфёров, С.В. Карпеев, О.Ю. Моисеев // *Компьютерная оптика*. – 2013.- Т. 37(3). – С. 326-331.
- [14] Degtyarev, S.A. Transmission of focused light signal through an apertured probe of a near-field scanning microscope / S.A. Degtyarev and S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 2015. – Vol. 25(2). – P. 306–313.
- [15] Huang, F.M. Super-Resolution without Evanescent Waves / F.M. Huang, and N.I. Zheludev // *Nano Lett.* – 2009. - Vol. 9(3). – P. 1249-1254.
- [16] Rogers, E.T.F. A super-oscillatory lens optical microscope for subwavelength imaging / E.T.F. Rogers, J. Lindberg, T. Roy, S. Savo, J.E. Chad, M.R. Dennis, and N.I. Zheludev // *Nature Materials*. – 2012. - Vol. 11. – P. 432–435.
- [17] Lu, D. Hyperlenses and metalenses for far-field super-resolution imaging / D. Lu, and Zh. Liu // *Nature Communications*. – 2012. - Vol. 3. – P.1205–(9pp).
- [18] Rogers, E.T.F. Super-oscillatory optical needle / E.T.F. Rogers, S. Savo, J. Lindberg, T. Roy, M. R. Dennis, and N. I. Zheludev // *Applied Physics Letters*. – 2013. - Vol. 102. – P. 031108-(4pp).
- [19] Mazilu, M. Optical Eigenmodes; exploiting the quadratic nature of the energy flux and of scattering interactions / Mazilu, M., J. Baumgartl, S. Kosmeier, and K. Dholakia // *Optics Express*. – 2011. - Vol. 19(2). – P. 933-945.
- [20] Baumgartl, J. Far field subwavelength focusing using optical eigenmodes / J. Baumgartl, S. Kosmeier, M. Mazilu, E. T. F. Rogers, N. I. Zheludev, and K. Dholakia // *Applied Physics Letters*. – 2011. - Vol. 98. – P. 181109-(3pp).
- [21] Pierri, R. On the information content of the radiated fields in the near zone over bounded domains / R. Pierri, and F. Soldovieri // *Inverse Problems*. – 1998. - Vol. 14. – P. 321-337.
- [22] Thaning, A. Limits of diffractive optics by communication modes / A. Thaning, P. Martinsson, M. Karelin, and A.T. Friberg // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2003. - Vol. 5(3). – P. 153–158.
- [23] Khonina, S.N. Generating light fields matched to the spheroidal wave-function basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Optical Memory and Neural Networks* (Allerton Press). – 2001. – Vol. 10(4). – P. 267-276.
- [24] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, and S.N. Khonina // *Proceedings of SPIE*. – 2014. - Vol. 9156. – P. 91560J-(8pp).
- [25] Хонина, С.Н. Метод вычисления собственных значений вытянутых сферидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Сойфер // *Доклады Академии наук*. – 2001. – V. 376(1). – P. 30-33.
- [26] Kirilenko, M.S. Calculation of the eigenfunctions of two lens imaging system / M.S. Kirilenko, and S.N. Khonina // *Proceedings of SPIE*. – 2015. - Vol. 9450. P. 945012-(8pp).

- [27] Кириленко, М.С. Расчёт собственных функций изображающей двухлинзовой системы в условиях осевой симметрии / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38(3). – С. 412-417.
- [28] Kirilenko, M.S. Investigation of the free-space propagation operator eigenfunctions in the near-field diffraction / M.S. Kirilenko, V.V. Pribylov, S.N. Khonina // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium. – 2015. – P. 2035-2038.
- [29] Luneburg, R.K. Mathematical Theory of Optics / R.K. Luneburg // Berkeley, California: University of California Press, 1966.
- [30] Kowarz, M.W. Homogeneous and evanescent contributions in scalar near-field diffraction / M.W. Kowarz // Applied Optics. – 1995. - Vol. 34(17). – P. 3055-3063.
- [31] Katrich, A. B. Do evanescent waves really exist in free space? / A.B. Katrich // Optics Communications. – 2005. - Vol. 255. P. 169–174.