

ФОРМИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ТОЧЕК НА ПРЕДЕЛЕ ДИФРАКЦИОННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

А.В. Попов

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия Аннотация

Рассмотрены различные критерии разрешающей способности оптических систем. Исследованы возможности формирования световых точек на пределе дифракционного разрешения с использованием косинусной апертурной функции и мод Гаусса-Эрмита.

Ключевые слова: разрешающая способность, дифракционный предел, критерии разрешимости, апертурная функция, моды Гаусса-Эрмита

Введение

Дифракционный предел, открытый в 1873 году Эрнстом Аббе – это минимально возможный размер светового пятна, которое можно получить, фокусируя электромагнитное излучение (свет) заданной длины волны в среде с показателем преломления n : больше столетия этот предел пространственного разрешения являлся непреодолимым препятствием на пути совершенствования техники оптической микроскопии в дальней зоне.

Сверхразрешение, или преодоление предела дифракции, выраженного в соответствии с теорией Эбби и критерием Рэля, является темой множества фундаментальных и прикладных исследований в современной оптике. Высокий интерес связан с тем, что область применения сверхразрешения вовсе не ограничивается улучшением качества изображений, но уже показана эффективность в уплотнении записи на оптических носителях информации, в литографии и нано-структурировании, оптическом манипулировании вплоть до атомных размеров и многих других областях.

Увеличение объема информации на DVD дисках достигается за счет уменьшения длины волны лазера и увеличения числовой апертуры объектива. Однако оптический диапазон длин волн имеет свой предел, как и имеются ограничения по увеличению числовой апертуры фокусирующей системы.

Одной из задач оптического сверхразрешения является преодоление рэлеевского критерия разрешения оптических приборов. Критерий заключается в том, что минимальный размер различимого объекта несколько меньше длины волны используемого света и принципиально ограничен дифракцией излучения. Если мы наблюдаем два близких источника света, их размытые образы накладываются один на другой. Рэлей показал, что если центральное световое пятно дифракционной картины одного источника света удалено от центрального светового пятна другого источника света на расстояние не менее радиуса первой темной дифракционной полосы, то мы начинаем воспринимать два источника света раздельно: это расстояние называется линейное разрешение оптического прибора.

Известны различные подходы к преодолению предельного разрешения. Как правило, уменьшение размера центрального пятна достигается за счет потери эффективности и роста боковых лепестков [1-3]. Тем не менее, в определенных оптических приложениях такие потери не являются существенными, особенно по сравнению с диафрагмированием. Например, сканирующие микроскопы могут работать всего с несколькими фотонами, что на полтора десятка порядков меньше мощности обычного

лазера. Именно использование сканирующих микроскопов привело к разработке STED-микроскопии [4], потенциально способной обеспечить разрешение нанометрового масштаба [5]. Также принципиальное отсутствие ограничений по оптическому разрешению характерно для области ближнего поля [6, 7], где имеют место так называемые затухающие волны.

Теоретические основы

Разрешающая способность определяет способность оптической системы изображать раздельно два близко расположенных точечных предмета.

Предельная разрешающая способность – это минимальное расстояние между двумя точками, при котором их изображение отличается от изображения одной точки.

Критерий Релея (рис. 1) гласит, что при провале в распределении интенсивности в изображении двух близких точек в 20% точки будут восприниматься как раздельные. Для этого необходимо, чтобы центральный максимум в изображении одной точки приходился бы на первый минимум в изображении другой. Для оптических систем при отсутствии aberrаций предельное разрешение равно 0.61 канонических единиц.

Под разрешающей способностью телескопа принято понимать разрешающую способность его объектива. Вообще, если свет от удаленного точечного источника проходит через отверстие в непрозрачном экране, то вследствие дифракции пучок испытывает дифракционное расширение.

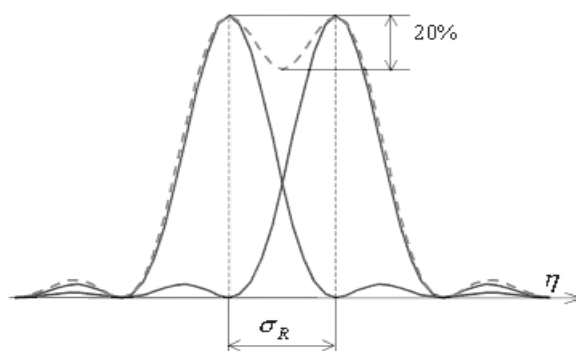


Рис. 1. Критерий Рэлея

В фокальной плоскости линзы, поставленной за экраном, изображение источника окажется размытым из-за дифракции. В случае круглого отверстия дифракционное изображение будет состоять из центрального светлого пятна и окружающих его концентрических колец. Радиус центрального пятна в фокальной плоскости линзы равен:

$$r = 1,22 \frac{\lambda}{D} F, \quad (1)$$

где λ – длина световой волны, D – диаметр отверстия, F – фокусное расстояние.

Если лучи света от удаленного источника падают на линзу непосредственно, то роль экрана выполняет оправа линзы. В этом случае под D нужно понимать диаметр линзы.

Дифракционный характер изображений ограничивает возможности оптических инструментов. Например, дифракционные изображения двух близких звезд в фокальной плоскости объектива телескопа могут сильно перекрыться, так что невозможно будет различить, наблюдаются две звезды или одна. Рассмотрим данный случай подробнее.

Пусть с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр D , рассматриваются две близкие звезды, находящиеся на угловом расстоянии ψ . Изображение каждой звезды в фокальной плоскости объектива имеет линейный размер (радиус пятна Эйри, рис. 2), равный $\lambda F/D$. При этом центры изображений находятся на расстоянии ψF .

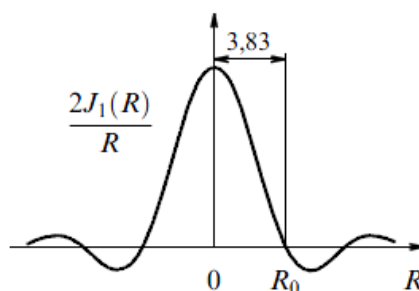


Рис. 2. Аппаратная функция зрачка оптической системы с нормированным радиусом диска Эйри $R_0 = 3,83$

Согласно критерию Рэля, две близкие точки объекта считаются разрешенными, если расстояние между центрами дифракционных изображений равно радиусу пятна Эйри. Применение критерия Рэля к объективу телескопа приводит к дифракционному пределу разрешения:

$$\psi_{\min} = \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (2)$$

Физической моделью для критерия Рэля являются два идентичных точечных когерентных источника, изображение которых ограничено дифракцией на апертуре оптической системы. Две точки различимы, если центральный максимум одной точки лежит не ближе первого минимума другого.

Есть другой, тесно связанный с критерием Рэля, критерий Аббе. Их отличие – только значение коэффициента. В практических приложениях, эта разница невелика. Критерий Аббе определяется следующим образом:

$$r = \frac{0,5\lambda}{NA} = \frac{0,5\lambda}{n \sin \theta}, \quad (3)$$

в то же время критерий Рэля математически записывается, как было указано выше, следующим образом:

$$r = \frac{0,61\lambda}{NA} = \frac{0,61\lambda}{n \sin \theta}, \quad (4)$$

где r – расстояние между точками, λ – длина волны света, n – показатель преломления, и NA – числовая апертура объектива, собирающая свет.

Другой критерий разрешения – критерий Спэрроу состоит в том, что два точечных источника находятся на пределе разрешения, если вторая производная в средней точке суммарного распределения интенсивности в дифракционной картине обращается в нуль. Этот критерий допускает вдвое меньшее расстояние между точками.

Модифицированный критерий Спэрроу утверждает, что разрешимость сохраняется, когда вторая производная распределения интенсивности изображения обращается в нуль в некоторой точке ($U=U_01$) между двумя гауссовыми точками изображения с условием, что эта точка U_01 должна быть решением, что первая производная распределения интенсивности изображения обращается в нуль [13]. Это можно записать так:

$$\left| \frac{\partial^2 I(U)}{\partial U^2} \right|_{U=U_0^1} = 0, \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial I(U)}{\partial U} \right|_{U=U_0^1} = 0. \quad (6)$$

На рисунке 3 показаны рассмотренные критерии. Стоит отметить, что критерий Спэрроу чаще используется в астрономии, в то время как критерий Рэля и Аббе традиционно применяются в микроскопии.

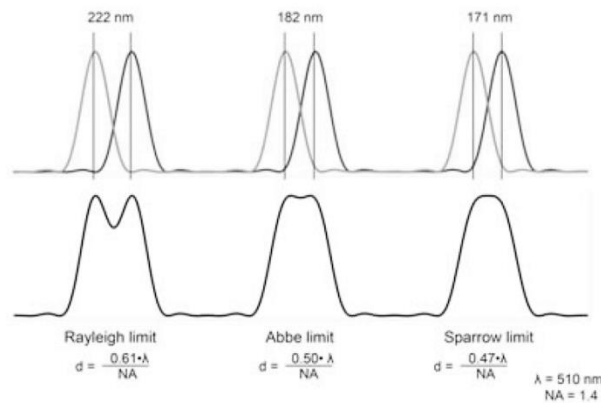


Рис. 3. Критерии разрешимости.

В критерии Рэля, первый минимум диска Эйри перекрывает максимум второго диска Эйри. В критерии Сэрроу, сумма двух дисков Эйри приводит к формированию плоского профиля интенсивности, а в критерии Аббе, небольшой провал по-прежнему различим между двумя максимумами.

Согласно критерию Рэля, угловое разрешение линзы или зеркала диаметром D задается

$$\theta_{Rayleigh} = \frac{1,22 \lambda}{D}. \quad (7)$$

В этом случае критерий Аббе определяется следующим образом:

$$\theta_{Abbe} = \frac{1,03 \lambda}{D}. \quad (8)$$

Для критерия Спэрроу, где диски Эйри перекрываются больше, причем так, что первые и вторые производные функции интенсивности обращаются в нуль:

$$\theta_{Sparrow} = \frac{0,94 \lambda}{D}. \quad (9)$$

Однако на практике оказывается, что достичь разрешения, удовлетворяющего даже критерию Рэлея, не так просто.

Результаты моделирования

Дифракционную картину Фраунгофера, создаваемую дифракционной решеткой, в общем случае можно считать преобразованием Фурье от ее апертурной функции. Тогда выходная функция $F(y)$ является результатом преобразования Фурье над функцией $f(x)$, подаваемой на входе:

$$F(y) = \int_{-a}^a f(x) \exp(-ikxy/f) dx, \quad (10)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, f – фокусное расстояние.

В качестве апертурной функции будем использовать вещественную входную функцию, а именно $f(x) = \cos(\alpha x)$.

Ниже представлен результат аналитического расчета:

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \cos(\alpha x) \cdot \exp(-i2\pi xy / \lambda f) dx = \\ & = a \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ya}{\lambda f} - \alpha a\right) + a \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ya}{\lambda f} + \alpha a\right). \quad (11) \end{aligned}$$

На рис. 4 представлены результаты моделирования с помощью созданной прикладной программы со следующими входными параметрами:

$$y \in [-5,5], x \in [-10,10], \lambda = 0,532 \text{ мкм}, f = 10 \text{ мкм}, \alpha = 5.$$

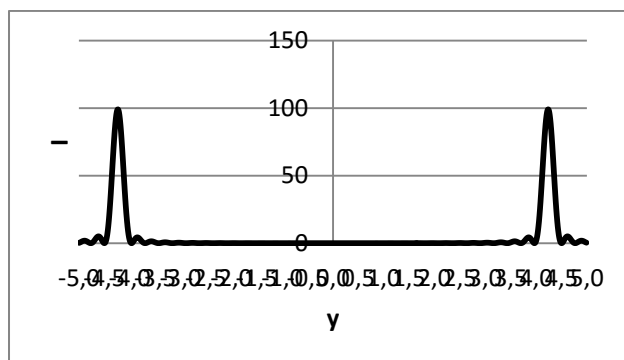


Рис. 4. Результирующее распределение интенсивности

Далее необходимо подобрать такой параметр α , чтобы максимально сблизить два пучка, но при этом сохранив их различимыми. Здесь отталкиваемся от представленных ранее понятий, таких как дифракционный предел и критерий разрешимости (примем критерий Рэлея).

Таким образом, учитывая, что диаметр апертуры в нашем случае равен $D = 20$ мкм, получаем следующий радиус диска Эйри $r = 0,32452$. Тогда условие для соблюдения критерия Рэлея будет выполняться $\Delta l \geq r$. С использованием численного моделирования было получено минимальное значение параметра α апертурной функции, при котором пучки остаются различимы, и при этом достигается дифракционный предел. Полученный для $\alpha_{\text{крит}} = 0,21899$ результат приведен на рисунке 5, а соответствующая апертурная функция на рис. 6.

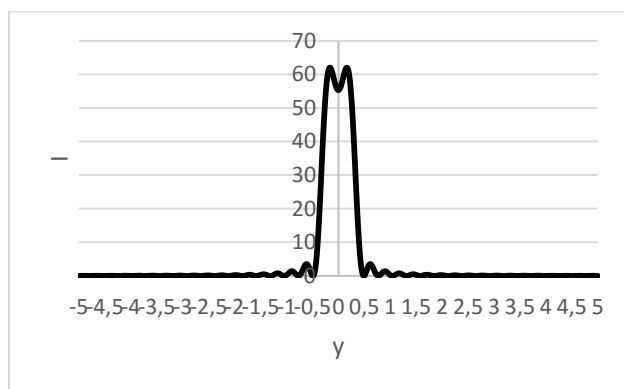


Рис. 5. Распределение интенсивности для критического значения α

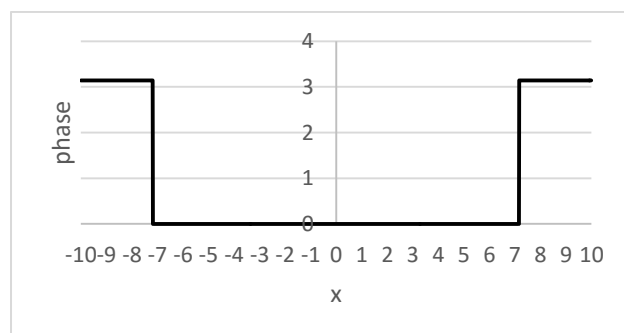


Рис. 6. Фаза $\phi(x)$ при критическом значении α

Заметим, однако, что в некоторых приложениях, например, при лазерной обработке материалов [8], необходимо формировать набор отдельных, но очень близко расположенных световых точек. Причем размер этих световых точек должен быть близок к дифракционному пределу. Для решения этой задачи в работе [9] было предложено воспользоваться модовыми распределениями, в частности, модами Гаусса-Эрмита [10].

Поэтому далее в качестве апертурной функции использовались одномерные моды Гаусса-Эрмита:

$$f(x) = \exp(-x^2/(2\sigma_0^2))H_n(x/\sigma_0). \quad (12)$$

Результаты моделирования для $n=1$ показаны на рис. 7 при следующих входных параметрах $y \in [-5,5]$, $x \in [-10,10]$, $\lambda = 0,532 \text{ мкм}$, $f = 10 \text{ мкм}$, $\sigma_0 = 10$.

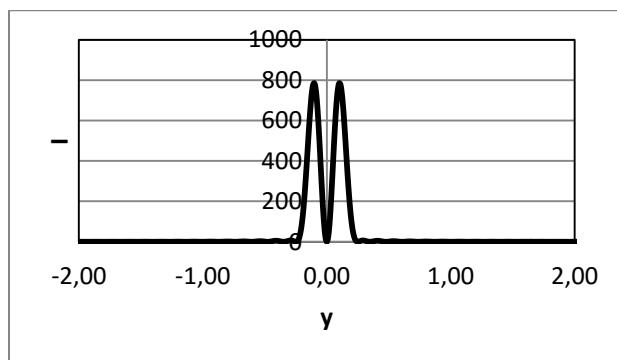


Рис. 7. Формируемое распределение интенсивности при использовании в качестве апертурной функции моды Гаусса-Эрмита первого порядка.

Нужно отметить, что использование гауссовых мод для формирования набора световых точек удобен в связи с инвариантностью модовых распределений при прохождении через оптические системы [11, 12].

Заключение

Было проведено численное исследование фокусировки лазерного излучения в близкорасположенные световые точки и показано, при каких параметрах косинусоидальной апертурной функции достигается расположение точек на пределе разрешения по критерию Релея. Также рассмотрен способ формирования световых точек на основе использования дифракционных оптических элементов, согласованных с модами Эрмита-Гаусса. Такие распределения привлекательны с точки зрения инвариантности при прохождении через оптические системы.

Литература

1. G. Toraldo di Francia, "Supergain antennas and optical resolving power," *Nuovo Cimento Suppl.* 9, 426–427 (1952).
2. F. M. Huang and N. I. Zheludev, "Super-resolution without evanescent waves," *Nano Letters* 9, 1249 – 1254 (2009).
3. Хонина С.Н., Волоотовский С.Г., Минимизация светового и теневого фокального пятна с контролируемым ростом боковых лепестков в фокусирующих системах с высокой числовой апертурой, *Компьютерная оптика*, 35(4), 438-451 (2011).
4. S. W. Hell and J. Wichmann, "Breaking the diffraction resolution limit by stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy," *Opt. Lett.* 19, 780–782 (1994).
5. Khonina S.N. and Golub I., How low can STED go? Comparison of different write-erase beam combinations for stimulated emission depletion microscopy, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 29, No. 10, 2242–2246 (2012).
6. Wang J., Wang Q. and Zhang M., Development and prospect of near-field optical measurements and characterizations // *Front. Optoelectron.* 5, 171–181 (2012).
7. Хонина С.Н., Савельев Д.А., Серафимович П.Г., Пустовой И.А., Дифракция на бинарных микроаксиконах в ближней зоне, *Оптический журнал*, т. 79, №10, с. 22 – 29 (2012).
8. Kelemen, L. Parallel photopolymerisation with complex light patterns generated by diffractive optical elements / L. Kelemen, S. Valkai and P. Ormos // *Optics Express*. – 2007. – Vol. 15(22). – P. 14488–14497.
9. Хонина, С.Н. Исследование фокусировки в близкорасположенные световые пятна при освещении дифракционных оптических элементов коротким импульсным лазерным пучком / С.Н. Хонина, С.А. Дегтярев, А.П. Порфирьев, О.Ю. Мойсеев, С.Д. Полетаев, А.С. Ларькин, А.Б. Савельев-Трофимов // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 2. – С. 187-196.
10. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн, Москва «Наука», 1979. 384 стр.

11. Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н., Обобщенные Эрмитовы световые пучки в свободном пространстве, Компьютерная оптика, 17, 31-36 (1997).
12. Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А., Саморепродукция многомодовых пучков Гаусса-Эрмита, Письма в ЖТФ, 25 (12), 62-69 (1999).
13. Andra Naresh Kumar Reddy, Dasari Karuna Sagar Resolution of Two unequally Bright points of Apodized Optical Systems with Asymmetric Circular Antenna arrays // Optics Research Group, #49, Department of Physics, University College of Science, Osmania University.