

# Формирование случайных полей с использованием разложения Карунена-Лоэва

Д.В. Болдырев<sup>1</sup>, М.В. Светлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** При распространении вихревых лазерных пучков в некой оптической среде возникают искажения, связанные со случайными флуктуациями этой оптической среды. Эти искажения могут быть описаны посредством случайного поля, сгенерированного на основе разложения Карунена-Лоэва, учитывающего статистические характеристики, а именно, корреляционную функцию случайного поля. Для нескольких видов корреляционных функций рассчитаны собственные функции корреляционного оператора и выполнен их анализ в зависимости от параметров. Выполнено исследование распространения сгенерированных случайных полей с использованием преобразования Френеля.

## 1. Введение

Одним из основных приложений световых пучков является беспроводная оптика (Free-Space Optics, FSO), когда оптический канал проходит через атмосферу или вакуум [1-3]. Практически неограниченный трафик сигнала на оптических частотах, а также безопасность оптических носителей информации, определяют безусловные преимущества оптических каналов от классических линий связи, основанных на радиоволнах. Однако атмосферные эффекты, такие как мерцание (scintillation), блуждание лучей (beam wander) и спектральные изменения, оказываемые на лазерные световые пучки, оказались настолько серьезными, что это существенно повлияло на технические характеристики оптических коммуникационных систем и ограничило область их применения [5-6]. Поэтому множество усилий направлено на поиск возможностей преодоления негативного влияния турбулентности среды. На сегодняшний день предлагаются несколько способов: использование частично когерентных пучков [7], лазерных пучков со специальной пространственной структурой (вихревые, бездифракционные, моды высших порядков) [8-14], векторных пучков с неоднородной поляризацией [15, 16], а также одновременно нескольких пучков (массивов пучков) или сложных (многокольцевых) пучков [17-19].

Нужно отметить, что экспериментальных работ по этой тематике значительно меньше, чем численных исследований, что оправдано определенными сложностями осуществления экспериментов. Более того, часто экспериментальные исследования проводятся в лабораторных условиях с применением имитаторов турбулентности, таких как диффузоры и рассеивающие экраны [20, 21], а также камеры генерации горячего воздуха [22], парогенераторы [10], аквариумы со взвесями [12].

Численное моделирование обеспечивает менее затратные, но при этом достаточно гибкие и разнообразные подходы для исследования распространения лазерных пучков в атмосферно-

турбулентной среде, а также развития методов преодоления или уменьшения деградации оптического сигнала, вызванного турбулентностью и другими флуктуациями показателя преломления оптической среды.

При анализе и компенсации атмосферных искажений используется разложение Карунена-Лоэва [23-25], обеспечивающее некоррелированность коэффициентов разложения. При этом оптимальные свойства функций Карунена-Лоэва очень близки к свойствам вытянутых сферидальных волновых функций [26, 27]. Оба типа функций не являются аналитическими, поэтому требуют решения задачи на собственные значения [28, 29].

В данной работе рассмотрено формирование случайных полей с использованием разложения Карунена-Лоэва для моделирования прохождения лазерных пучков через оптические среды со случайными флуктуациями, имеющими заданные статистические характеристики, в частности, корреляционную функцию. Для нескольких видов корреляционных функций рассчитаны собственные функции корреляционного оператора и выполнен их анализ в зависимости от параметров.

## 2. Теоретические основы

Течения жидкостей и газов, наблюдаемые в природных условиях и технических устройствах, делятся на два типа: ламинарные (спокойные, плавные, регулярные) и турбулентные (хаотично изменяющиеся во времени и в пространстве) [30]. Для анализа случайных атмосферных искажений используется разложение Карунена-Лоэва [23-25].

Обозначим интегральный оператор  $K$  на пространстве  $L^2(D)$ :  $G: u \rightarrow Gu$ , где  $u \in L^2(D)$ . Учтем, что ядро  $K(x, y)$  определяет оператор  $G$ , как:

$$u(y) = [Gu](x) = \int_D K(x, y)u(y)dy. \quad (1)$$

Такой оператор  $G$  называется оператором Гильберта-Шмидта. Также стоит отметить, что т.к. данный оператор однозначно можно определить по формуле (1), то он является компактным [23].

Пусть  $X: D \times \Omega$  – непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс, где  $X \in L^2(D \times \Omega)$ . Перепишем формулу (1) для  $K(x, y) = R_X(s, t)$ , где  $R_X(s, t)$  – автокорреляционная функция случайного процесса  $\{X_t\}_{t \in T}$ , а  $K: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$[Gu](s) = \int_D K(s, t)u(t)dt. \quad (2)$$

Если  $K: L^2(D) \times L^2(D)$ , тогда оператор  $K$  – компактен, положительный и самосопряженный [31]. Исходя из того, что это верно для (2), то мы можем использовать спектральную теорему для компактных самосопряженных операторов для того, чтобы определить, что  $K$  имеет набор собственных векторов  $\{e_i\}$  на пространстве  $L^2(D)$  и действительных собственных чисел  $\{\lambda_i\}$  [32]:

$$Ge_i = \lambda_i e_i.$$

Более того можно сделать вывод, что т.к.  $G$  – положительный оператор в гильбертовом пространстве, то собственные числа  $\lambda_i$  не отрицательный (и имеют единственную возможную предельную точку в нуле). Теперь предполагается, что стохастический процесс  $X$  является квадратично интегрируемым на  $D \times \Omega$ , и, соответственно, можно использовать базис  $\{e_i\}$  на  $L^2(D)$  следующим образом:

$$X_t = \sum_i x_i e_i(t), \quad x_i = \int_D X_t e_i(t) dt, \quad (3)$$

где данное неравенство имеет исключительно среднеквадратичный смысл, ряд сходится в пространстве  $L^2(D \times \Omega)$  и  $t \in D$  [33].

Также стоит отметить, что коэффициенты  $x_i$  имеют ряд свойств, таких как  $M[x_i] = 0$ ;  $M[x_i x_j] = \delta_{ij} \lambda_j$ ;  $D[x_i] = \lambda_j$ .

Теорема Карунена-Лоэва: пусть  $X: D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – это непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс, где  $X \in L^2(\Omega \times D)$ , тогда существует базис  $\{e_i\}$  в  $L^2(D)$ , такой, что для для всех  $t \in D$  выполняется [34]:

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i(t), \quad (4)$$

где коэффициенты  $x_i$  можно найти как  $x_i(\omega) = \int_D X_t(\omega) e_i(t) dt$  и удовлетворяет свойствам:  $M[x_i] = 0$ ;  $M[x_i x_j] = \delta_{ij} \lambda_j$ ;  $D[x_i] = \lambda_j$ .

Предположим, что  $\lambda_k = 0$  для некоторого  $k$ , тогда рассмотрим коэффициент соответствующий коэффициент  $x_k$  для (3). Используя теорему Карунена-Лозва, можно сказать, что  $M[x_k] = 0$ ,  $D[x_k] = \lambda_k = 0$ , соответственно, также  $x_k = 0$ . Отсюда делаем вывод, что  $x_k$ , который соответствует нулевому собственному числу, поэтому в разложении Карунена-Лозва для квадратично интегрируемых, центрированных и непрерывных в среднеквадратичном стохастических процессов могут использоваться только те  $x_i$ , которым соответствуют положительные собственные числа  $\lambda_i$ . С учетом этого можно нормализовать  $x_i$  и определить их через  $\xi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i$ , что приводит формулу (4) в более часто используемый вид [35]:

$$X(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i(\omega) e_i(t), \quad (5)$$

где  $\xi_i$  - взаимно некоррелированные центрированные случайные величины с единичной дисперсией. Также отметим, что при разложении гауссовского процесса по средством функции Карунена-Лозва  $\xi_i$  также являются нормальными случайными независимыми величинами. Это является крайне полезным свойством, т.к. представление гауссовского процесса в виде (5) почти всегда сходится [36].

Для формирования же случайных полей используется разложение Карунена-Лозва, которое имеет следующий вид [37]:

$$X(t) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \xi_i e_i(t). \quad (6)$$

### 3. Расчет функций Карунена-Лозва и формирование случайных полей

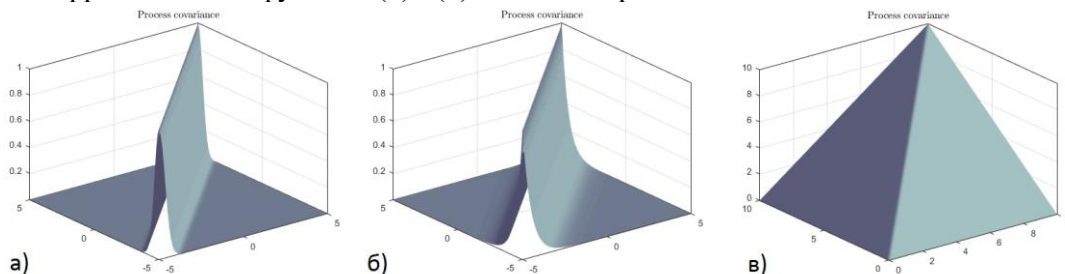
Применим метод формирования случайного поля (6) на основе функций Карунена-Лозва, являющихся собственными для корреляционного оператора (2). В качестве примера рассмотрим три вида автокорреляционных функций:

$$- R_{X1}(s, t) = \exp\left(-\frac{(s-t)^2}{\sigma}\right) \text{ (Гауссова),} \quad (7)$$

$$- R_{X2}(s, t) = \exp\left(-\frac{|s-t|}{\sigma}\right) \text{ (экспоненциальная),} \quad (8)$$

$$- R_{X3}(s, t) = \min(s, t) - s^t. \quad (9)$$

Вид автокорреляционных функций (7) - (9) показан на рис. 1.



**Рисунок 1.** Автокорреляционные функции вида: (7) при  $\sigma = 0.5, s, t \in [-5; 5]$  (а), (8) при  $\sigma = 0.5, s, t \in [-5; 5]$  (б), (9) при  $s, t \in [0; 10]$  (в).

Для формирования случайных полей (6) с помощью разложения Карунена-Лозва необходимо вычислить собственные функции корреляционных операторов с соответствующими автокорреляционными функциями (7) - (9).

Стоит отметить, что после некоторой собственной функции  $e_i(t)$  последуют функции со значительно меньшим значением собственных чисел  $\lambda_i$ , использование которых приведет к некорректным результатам формирования случайного поля. Пригодные для использования собственные функции визуально выглядят более плавными и гладкими. На рисунке 2 изображен массив собственных функций, в котором близко к правой границе видны удовлетворяющие нас собственные функции, из которого видно, что лишь малая часть собственных функций может быть использована для дальнейшего разложения Карунена-Лоэва.

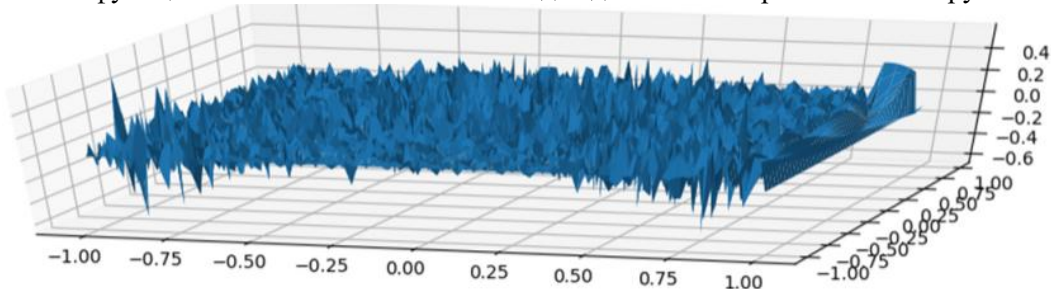


Рисунок 2. Массив собственных функций  $e_i(t)$  функции  $R_{X1}(s, t)$ .

На рисунках 3 и 4 продемонстрированы несколько первых собственных функций  $e_i(t)$  и собственных значений  $\lambda_i$  для  $R_{X1}(s, t)$  (рисунки 3а и 4а),  $R_{X2}(s, t)$  (рисунки 3б и 4б),  $R_{X3}(s, t)$  (рисунки 3в и 4в):



Рисунок 3. Первые собственные функции  $e_i(t)$  функций а)  $R_{X1}(s, t)$ , б)  $R_{X2}(s, t)$ , в)  $R_{X3}(s, t)$ .

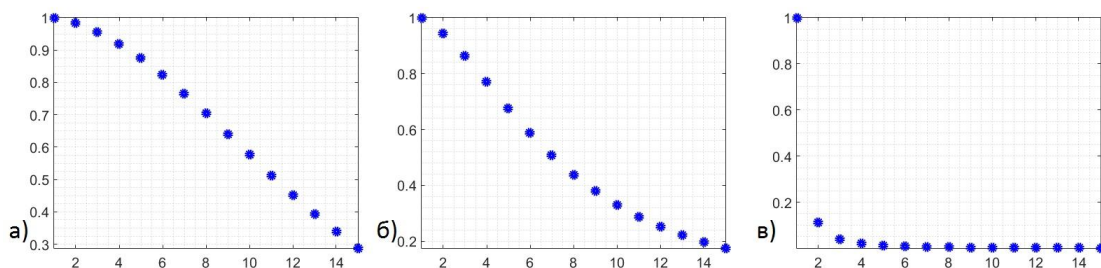


Рисунок 4. Собственные числа  $\lambda_i$  функций (а)  $R_{X1}(s, t)$ , (б)  $R_{X2}(s, t)$ , (в)  $R_{X3}(s, t)$ .

Как видно из рис. 3а,б, собственные функции для гауссовой и экспоненциальной автокорреляционной функций очень похожи и близки к тригонометрическому базису [38]. Это определяется схожестью порождающих функций. Для третьего вида автокорреляционной функций ситуация несколько иная, а собственные функции напоминают базис функций Цернике [39, 40], которые имеют простое аналитическое выражение и широко используются для представления классических аберраций [41-43].

#### 4. Моделирование распространения случайного поля в свободном пространстве

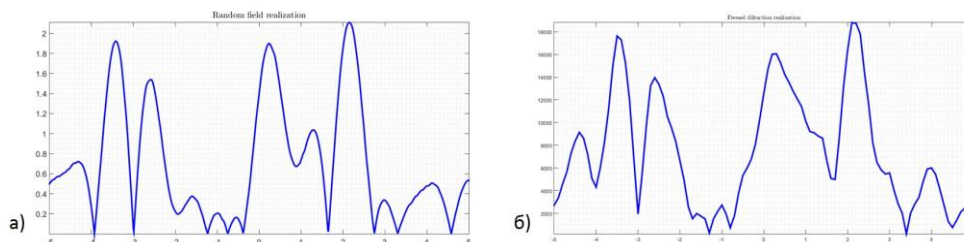
Используя (6) сгенерируем случайные поля от  $R_{X1}(s, t)$ ,  $R_{X2}(s, t)$ ,  $R_{X3}(s, t)$ , изображенные на рисунка 5а, 6а и 7а соответственно. Отдельные реализации случайных полей показаны на рисунках 5а, 6а и 7а.

Распространение светового поля в свободном пространстве можно описать на основе преобразования Френеля, которое в одномерном случае имеет следующий вид [44]:

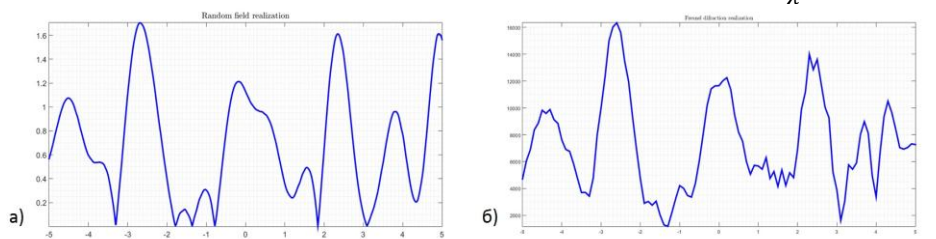
$$F(u, z) = -\sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x-u)^2\right] dx, \quad x-u \ll z, \quad (10)$$

где  $f(x)$  – входное зашумленное поле во входной плоскости при  $z = 0$ ,  $F(u, z)$  – поле на расстоянии  $z$  от входной плоскости,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – длина волны.

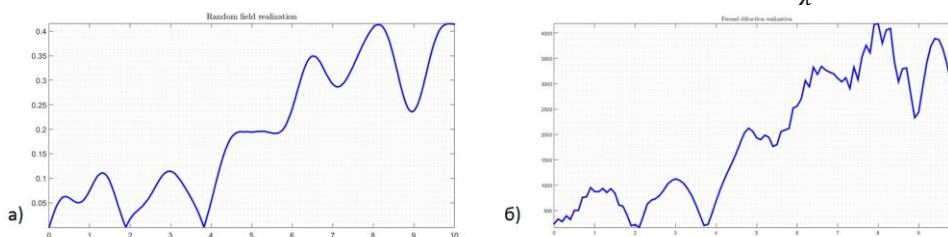
Результат моделирования для случайных сигналов  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ,  $X_3(t)$  показан на рисунках 5б, 6б, 7б, соответственно.



**Рисунок 5.** (а) Случайное  $X_1(t)$  поле полученное на основе  $R_{X1}(s, t)$  при  $M = 20$ , и (б) результат преобразования Френеля для него при  $z = 10$ мм;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda = 633$ нм.



**Рисунок 6.** (а) Случайное  $X_2(t)$  поле полученное на основе  $R_{X2}(s, t)$  при  $M = 20$ , и (б) результат преобразования Френеля для него при  $z = 10$ мм;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda = 633$ нм.



**Рисунок 7.** (а) Случайное  $X_3(t)$  поле полученное на основе  $R_{X3}(s, t)$  при  $M = 20$ , и (б) результат преобразования Френеля для него при  $z = 10$ мм;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda = 633$ нм.

Отдельно стоит отметить, что низкочастотные составляющие пучков, представляющие собой крупные детали на рисунках 5а, 6а, 7а распространяются с помощью преобразования Френеля без особых изменений в размерах (рисунки 5б, 6б, 7б), примерно сохраняя изначальный вид. В то же время мелкие детали наоборот искажаются, иногда довольно значительно.

## 5. Заключение

В данной работе были рассмотрены теорема Карунена-Лоэва и метод формирования случайного поля через разложение Карунена-Лоэва. Для нескольких видов корреляционных функций рассчитаны собственные функции корреляционного оператора и выполнен их анализ в зависимости от параметров. Показано, что собственные функции для гауссовой и экспоненциальной автокорреляционной функций очень похожи между собой и близки к тригонометрическому базису. Для третьего вида автокорреляционной функций ситуация несколько иная, а собственные функции напоминают базис функций Цернике.

С использованием рассчитанных собственных функций сформированы случайные поля, характеризующиеся соответствующими корреляционными функциями. Моделирование распространения этих полей в свободном пространстве с использованием преобразования Френеля показало, что у сформированных полей просматривается тенденция к сохранению крупных деталей, с изменением масштаба, но с малыми искажениями, мелкие же детали искажаются сильнее.

## 6. Благодарности

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-37-00056-мол\_а).

## 7. Литература

- [1] Ramirez-Iniguez, R. Optical Wireless Communications: IR for Wireless Connectivity / R. Ramirez-Iniguez, S.M. Idrus, Z. Sun – London: Taylor & Francis Group, Book, CRC Press, 2007. – 376 p.
- [2] Majumdar, A.K. Free-space laser communications: principles and advances / A.K. Majumdar, J.C. Ricklin – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 418 p.
- [3] Henniger, H. An Introduction to Free-space Optical Communications / H. Henniger, O. Wilfer // Radioengineering. – 2010. – Vol. 19(2). – P. 203-212.
- [4] Isumaru, A. Wave Propagation and Scattering in Random media / A. Isumaru – New York: John Wiley & Sons, 1999. – 272 p.
- [5] Mishchenko, M.I. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A.A. Lacis – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 462 p.
- [6] Andrews, L.C. Laser beam propagation in random media / L.C. Andrews – Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 2005. – 808 p.
- [7] Gbur, G. Angular spectrum representation for the propagation of arbitrary coherent and partially coherent beams through atmospheric turbulence / G. Gbur, O. Korotkova // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – Vol. 24. – P. 745-752. DOI: 10.1364/JOSAA.24.000745.
- [8] Gbur, G. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation / G. Gbur, R.K. Tyson // J. Opt. Soc. Am. A. – 2008. – Vol. 25. – P. 225-230. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000225.
- [9] Soifer, V.A. Vortex beams in turbulent media: review / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // Computer Optics. – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [10] Porfirev, A.P. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56(11). – P. E5-15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
- [11] Карпеев, С.В. Сравнение устойчивости вихревых пучков Лагерра-Гаусса к случайным флуктуациям оптической среды / С.В. Карпеев, В.Д. Паранин, М.С. Кириленко // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 208-217. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-208-217.
- [12] Khonina, S.N. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre-Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, V.D. Paraniin // Optics and Lasers in Engineering. – 2018. – Vol. 105. – P. 68-74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
- [13] Eyyuboglu, H.T. Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence. / H.T. Eyyuboglu // Applied Physics B. – 2007. – Vol. 88(2). – P. 259-265. DOI: 10.1007/s00340-007-2707-6.
- [14] Васильев, В.С. Распространение пучков Бесселя и суперпозиций вихревых пучков в атмосфере / В.С. Васильев, А.И. Капустин, Р.В. Скиданов, Н.А. Ивлиев, В.В. Подлипов, С.В. Ганчевская // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 376-384. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.

- [15] Gu, Y. Scintillation of nonuniformly polarized beams in atmospheric turbulence / Y. Gu, O. Korotkova, G. Gbur // *Optics Letters*. – 2009. – Vol. 34(15). – P. 2261-2263. DOI: 10.1364/OL.34.002261.
- [16] Zhou, P. Propagation property of a nonuniformly polarized beam array in turbulent atmosphere / P. Zhou, X. Wang, Y. Ma, H. Ma, X. Xu, Z. Liu // *Applied Optics*. – 2011. – Vol. 50(9). – P. 1234-1239. DOI: 10.1364/AO.50.001234.
- [17] Polynkin, P. Optimized multiemitter beams for free-space optical communications through turbulent atmosphere / P. Polynkin, A. Peleg, L. Klein, T. Rhoadarmer, J.V. Moloney // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32(8). – P. 885-887. DOI: 10.1364/OL.32.000885.
- [18] Chen, C. Propagation of radial Airy array beams through atmospheric turbulence / C. Chen, H. Yang, M. Kavehrad, Z. Zhou // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2014. – Vol. 52. – P. 106-114. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2013.07.003.
- [19] Кириленко, М.С. Исследование устойчивости топологического заряда многокольцевых вихревых пучков Лагерра–Гаусса к случайным искажениям / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 567-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-567-576.
- [20] Thomas, S. A simple turbulence simulator for adaptive optics // *Proceedings of SPIE*. – 2004. – Vol. 5490. – P. 766-773. DOI: 10.1117/12.549858.
- [21] Mishra, S.K. Design and testing of customized phase plate as atmospheric turbulence simulator / S.K. Mishra, A. Dixit, V. Porwal, D. Mohan // *37th National Symposium of OSI at Pondicherry University*. – 2013. – P. 172-174. DOI: 10.13140/2.1.4106.5920.
- [22] Keskin, O. Hot-air optical turbulence generator for the testing of adaptive optics system: principles and Characterization / O. Keskin, L. Jollissaint, C. Bradley // *Applied Optics*. – 2006. – Vol. 45(20). – P. 4888-4897. DOI: 10.1364/AO.45.004888.
- [23] Wang, L. Karhunen-Loeve Expansions and their Application – Ann Arbor: ProQuest, 2008. – 292 p.
- [24] Soifer, V.A. Decorrelated features of images extracted with the aid of optical Karhunen-Loeve expansion / V.A. Soifer, M.A. Golub, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 1993. – Vol. 3(3). – P. 289-295.
- [25] Soifer, V.A. Stability of the Karhunen-Loeve expansion in the problem of pattern recognition / V.A. Soifer, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 1994. – Vol. 4(2). – P. 137-148.
- [26] Fancourt, C.L. On the relationship between the Karhunen-Loeve transform and the prolate spheroidal wave functions / C.L. Fancourt, C. Principe // *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. – 2000. – Vol. 1. – P. 261-264.
- [27] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Proceedings of SPIE*. – 2014. – Vol. 9146. – P. 91560J. DOI: 10.1117/12.2054214.
- [28] Хонина, С.Н. Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Сойфер // *Доклады Академии наук*. – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-33.
- [29] Кириленко, М.С. Вычисление собственных функций ограниченного дробного преобразования Фурье / М.С. Кириленко, Р.О. Зубцов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 332-338. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-3-332-338.
- [30] Сивухин, Д.В. *Общий курс физики. Том IV* – М.: Физматлит, 2005. – 752 с.
- [31] Naylor, A.W. *Linear operator theory in engineering and science* / A.W. Naylor, G. Sell – Berlin: Springer-Verlag, 1982. – 624 p.
- [32] Gohberg, I. *Basic classes of linear operators* / I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek – Basel: Birkhauser, 2003. – 407 p.
- [33] Трикоми, Ф. *Интегральные уравнения* – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 300 с.
- [34] Van Trees, H.L. *Detection, Estimation and Modulation Theory* – New York: Wiley, 1968. – Vol. 1. – 1176 p.

- [35] Le Maitre, O.P. Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics: Scientific Computation / O.P. Le Maitre, O.M. Knio – Luxembourg: Springer, 2010. – 481 p.
- [36] Fukunaga, K. Representation of Random Processes Using the Finite Karhunen-Loeve Expansion / K. Furunaga, W.L.G. Koontz // Information and Control. – 1970. – Vol. 16(1). – P. 85-101. DOI: 10.1016/S0019-9958(70)80043-2.
- [37] Huang, S.P. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes / S.P. Huang, S.T. Quek, K.K. Phoon // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2001. – Vol. 52. – P. 1029-1043. DOI: 10.1002/nme.255.
- [38] Голуб, М.А. Разложение Карунена-Люэва при экспоненциально-косинусной корреляционной функции / М.А. Голуб, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1993. – Т. 13. – С. 49-53.
- [39] Roddier, N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials // Opt. Eng. – 1990. – Vol. 29. – P. 1174-1180.
- [40] Dai, G.-M. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions / G.-M. Dai // J. Opt. Soc. Am. A. – 1995. – Vol. 12(10). – P. 2182-2193. DOI: 10.1364/JOSAA.12.002182.
- [41] Applegate, R.A. Visual acuity as a function of Zernike mode and level of root mean square error / R.A. Applegate, C. Ballentine, H. Gross, E.J. Sarver, C.A. Sarver // Optometry and Vision Science. – 2003. – Vol. 80(2). – P. 97-105. DOI: 10.1097/00006324-200302000-00005.
- [42] Porfirev, A.P. Experimental investigation of multi-order diffractive optical elements matched with two types of Zernike functions / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // Proceedings of SPIE. – 2016. – Vol. 9807. – P. 98070E. DOI: 10.1117/12.2231378.
- [43] Хорин, П.А. Анализ аберраций роговицы человеческого глаза / П.А. Хорин, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков, С.Л. Бранчевский // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 810-817. DOI: 10.18287/0134-2452-2016-40-6-810-817.
- [44] Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы – М.: Наука, 1976. – 280 с.

## Formation of random fields using the Karhunen-Loeve expansion

D.V. Boldyrev<sup>1</sup>, M.V. Svetlov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** During the propagation of vortex laser beams in a certain optical medium, distortions arise due to random fluctuations of this optical medium. These distortions can be described by means of a random field generated on the basis of the Karhunen-Loeve decomposition, taking into account statistical characteristics, namely, the correlation function of a random field. For several types of correlation functions, the eigenfunctions of the correlation operator are calculated and their analysis is performed depending on the parameters. Research of the propagation of generated random fields using the Fresnel transform was conducted.