Энергетический обмен в системе двух связанных квантовых осцилляторов с учетом внешних сил и трения при нулевой температуре

Е.А. Михин[1], П.А. Головинский[1,2], А.А. Дробышев[1]

[1]Воронежский государственный технический университет, 20-летия Октября 84, Воронеж, Россия, 394006
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский переулок 9, Долгопрудный, Россия, 141700

Аннотация. Исследуются особенности динамики двух связанных квантовых осцилляторов в поле лазерной волны. Построена теоретическая модель этой системы, в которой учтена диссипация энергии. Особое внимание в работе уделено выявлению условий наиболее эффективного протекания процесса обмена экситонами между осцилляторами. Учёт поля лазерной волны и диссипативных сил был произведён с использованием гамильтониана Бейтмана-Кальдирола-Канаи.

1. Введение

Квантовые диссипативные системы играют значительную роль в различных областях физики включая фазовые переходы, квантовую оптику и твердотельные явления. Связанные механические осцилляторы – это базовая модель для многих физических объектов: атомов во внешнем поле [1], кулоновски связанных квантовых точек [2], оптомеханических устройств [3] и т.п. Наномеханические осцилляторы перспективные объекты для теоретического исследования реализации управления квантовой системой. Возможность осуществления связи микромеханического осциллятора с микроволновым резонатором [4] представляет собой одну из практических реализаций интерфейса между квантовомеханическим состоянием и оптическим полем. Система связанных квантовых осцилляторов может быть использована как возможный механизм создания запутанных состояний в системе наноэлектронных устройств [5].

Основное внимание мы сосредоточим на рассмотрении задачи двух связанных квантовых осцилляторов при нулевой температуре. Используя гамильтониан Бейтмана-Кальдирола-Канаи учитывающего внешнее лазерное поле и диссипативные силы оказывается возможным решение нестационарного уравнения Шрёдингера. Строгие математические методы, используемые для этого подробно описаны в [6, 7]. Данный подход может быть использован для случаев слабой и сильной связи между осцилляторами.

2. Волновая функция квантового осциллятора

Гамильтониан Бейтмана-Кальдирола-Канаи для квантового осциллятора во внешнем поле при наличии диссипативных сил может быть записан в следующей форме

$$H(q,q,t)=\mathrm{e}^{\gamma t}\left(\mathrm{e}^{-2\gamma t}q^2/2+\Omega^2q^2/2-qF(t)\right). \quad (1)$$

Здесь q – это координата частицы; $F(t)$ – напряженность внешнего лазерного поля; Ω – собственная частота колебаний; параметр γ характеризует диссипацию энергии. Здесь и далее используется система единиц для которой $\hbar=m=1$. Решение нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (1) имеет вид

$$\psi(q,t)=\exp\left\{\frac{1}{4}\gamma\left(t-\mathrm{i}e^{\gamma t}q^2\right)\right\}\chi\left(\mathrm{e}^{\gamma t/2}(q-x),t)\right)\exp\left(\mathrm{i}\xi q\exp(\gamma t/2)-\mathrm{i}S\right). \quad (2)$$

S – классическое действие, функция $\xi(t)$ представляет собой решение классического уравнения движения для гармонического осциллятора

$$\ddot{\xi}+\Omega_d{}^2\xi=f(t), \quad (3)$$

где $\Omega_d^2=\Omega^2-\gamma^2/4$, а $f=e^{\gamma t/2}F(t)$. Функция $\chi(q,t)$ представляет собой решение уравнения Шрёдингера для свободного осциллятора без трения

$$\frac{\partial\chi(q,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi(q,t)}{\partial q^2}+\frac{1}{2}\Omega_d{}^2q^2\chi(q,t). \quad (4)$$

Таким образом, получена волновая функция для одного квантового осциллятора в поле лазерной волны с учётом диссипации.

3. Волновая функция связанных квантовых осцилляторов

С использованием решения (2) может быть получена волновая функция для двух связанных осцилляторов в поле лазерной волны с учётом диссипации. Гамильтониан этой системы может быть представлен в следующей форме

$$H=e^{\gamma t}\left(e^{-2\gamma t}\sum_{j=1}^{2}q_j^2/2+\sum_{k,j=1}^{2}V_{kj}q_kq_j/2-\sum_{k,j=1}^{2}F_j(t)q_j\right), \quad (5)$$

где q_j – отклонение j-го осциллятора от положения равновесия ($j=2$); $F_j(t)$ – внешняя сила действующая на j-ый осциллятор; V_{kj} – потенциал взаимодействия осцилляторов друг с другом.

Двухчастичное уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (5) может быть сведено к одночастичному путём замены переменных $q_j\to z_j$ [8] в соответствии с матричным уравнением, описывающим поворот на угол φ в координатном пространстве

$$\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Если выбрать угол поворота φ в соответствии с уравнением

$$\cos\varphi=\left[(1+\mu)/2\right]^{1/2}, \quad (7)$$

где

$$\mu=\sqrt{\frac{(V_{22}-V_{11})^2}{4V_{12}^2+(V_{22}-V_{11})^2}}, \quad (8)$$

в гамильтониане (5) удаётся разделить переменные. В новых координатах решение уравнения Шрёдингера может быть записано в виде произведения двух одночастичных волновых функций (2)

$$\Psi(z_1,z_2,t)=\psi_1(z_1,t)\psi_2(z_2,t). \quad (9)$$

Волновая функция (9) позволяет исследовать процесс энергетического обмена в рассматриваемой системе. Для определения средней колебательной энергии каждого осциллятора необходимо произвести в (9) обратное преобразование координат $z_j \to q_j$, после чего средняя колебательная энергия может быть найдена по формуле

$$E_j(t) = \int \Psi^*(q_1, q_2, t) H_j(q_j) \Psi(q_1, q_2, t)\, dq_1\, dq_2, \tag{10}$$

где $H_j(q_j)$ оператор полной механической энергии осциллятора.

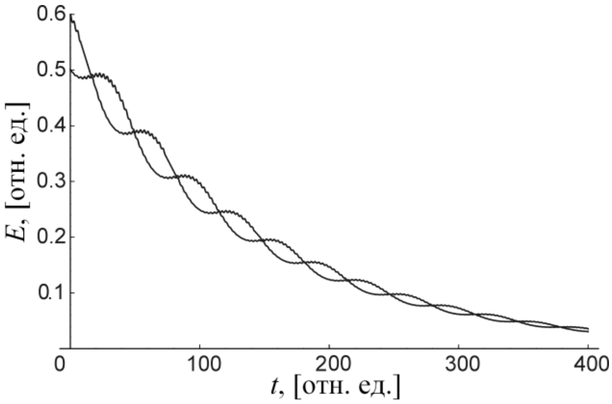

Рисунок 1. Зависимость энергии осцилляторов от времени.

На рисунке 1 показана зависимость полной механической энергии осцилляторов единичной массы от времени. Волновая функция начального состояния каждого осциллятора была взята в форме функции Гаусса, а связь между осцилляторами включалась адиабатически в начальный момент времени. Кривые представлены для случая отсутствия внешних сил, но учтены диссипативные силы. Виден энергетический обмен между осцилляторами, полная энергия системы со временем экспоненциально убывает.

4. Заключение

В работе получена волновая функция системы двух связанных квантовых осцилляторов во внешнем поле с учётом диссипации. Продемонстрировано использование этой функции для расчёта среднего значения полной механической энергии каждого квантового осциллятора без учёта внешнего лазерного поля. С помощью полученной волновой функции в дальнейшем может быть исследовано влияние характеристик лазерного поля на энергетические процессы в рассматриваемой системе.

5. Литература

[1] Zimmerman, M.L. Stark structure of the Rydberg states of alkali-atoms / M.L. Zimmerman, M.G. Littmen, M.M. Kash, D. Kleppner // Phys. Rev. – 1979. – Vol. A 20. – P. 2251-2275.

[2] Bayer, M. Coupling and entangling of quantum dot states in quantum dot molecules / M. Bayer, P. Hawrylak, K. Hinzer, [et al.] // Science. – 2001. – Vol. 291. – P. 451-453.

[3] Kippenberg, T.J. Cavity optomechanics: back-action at the mesoscale / T.J. Kippenberg, K.J. Vahala // Science. – 2008. – Vol. 321. – P. 1172-1176.

[4] Verhagen, E. Quantum coherent coupling of mechanical oscillator to an optical cavity mode / E. Verhagen, S. Deléglise, S. Weis, A. Shliesser, T.J. Kippenberg // Nature. – 2012. – Vol. 482. – P. 63-67.

[5] Eisert, J. Toward quantum entanglement in nanomechanial devices / J. Eisert, M.B. Plenio, S. Bose, J. Hartley // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93. – P. 190402(4).

[6] Pedrosa, I.A. Complete exact quantum states of the generalized time-dependent harmonic oscillator / I.A. Pedrosa // Modern Physics Letters B. – 2004. – Vol. 18(26). – P. 1267-1274.

[7] Lima, A.L. On the quantum motion of generalized time-dependent forced harmonic oscillator / A.L. de Lima, A. Rosas, I.A. Pedrosa // Annals of Physics. – 2008. – Vol. 323. – P. 2253-2264.

[8] Dutra, A.D.S. On the quantum mechanical propagator for driven coupled harmonic oscillators / A.D.S. Dutra // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 4189-4198.

Energy exchange in coupled forced and damped quantum harmonic oscillators at zero temperature

E.A. Mikhin[1], P.A. Golovinski[1,2], A.A. Drobyshev[1]

[1]Voronezh State Technical University, 20-Letiya Oktyabrya st. 84, Voronezh, Russia, 394006
[2]Moscow Physical-Technical Institute (State University), Institutskii per. 9, Dolgoprudny, Russia, 141700

Abstract. The forced oscillations in a system of two coupled quantum oscillators of finite Q-factor of zero temperature are considered. The subject of the study was the process of energy exchange between oscillators in this system. The presence of friction and external forces was taken into account by using the Bateman-Caldirola-Kanai Hamiltonian. Expressions are obtained for the time evolution of the average energy of each oscillator for various external forces and parameters of a quantum system.