

# Эффективное формирование идеального оптического вихря с помощью фазового оптического элемента

В.В. Котляр<sup>а,б</sup>, А.А. Ковалёв<sup>а,б</sup>, А.П. Порфирьев<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия,

<sup>б</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

---

## Аннотация

Рассмотрено формирование идеального оптического вихря тремя оптическими элементами: амплитудно-фазовым с пропусканием, пропорциональным функции Бесселя, оптимальным фазовым с пропусканием, пропорциональным знаку функции Бесселя, и вихревым аксиконом. Показано, что максимальная интенсивность света на кольце достигается для оптимального фазового элемента. Ширина светового кольца, сформированного вихревым аксиконом, примерно в два раза больше, чем ширина двух других колец.

*Ключевые слова:* оптический вихрь; идеальный оптический вихрь; топологический заряд; аксикон; функция Бесселя; преобразование Фурье.

---

## 1. Введение

В [1] рассмотрен "идеальный" оптический вихрь (ИОВ), радиус которого не меняется при изменении топологического заряда. В [1] ИОВ формируют с помощью фазового оптического элемента, состоящего из набора концентрических колец, толщина каждого из которых аппроксимирует дельта функцию. В [2] ИОВ формируют с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки (СФП). В обеих работах ИОВ формируется приближённо и его качество оказалось невысоким. В [3] узкое кольцо изображают с помощью 4f-схемы, однако таким способом нельзя сформировать ИОВ в фокусе высокоапертурного объектива для задач оптического манипулирования. В [4] вместо аксикона предлагается амплитудно-фазовый оптический элемент, аппроксимирующий моду Бесселя. В [4] наиболее близко подошли к оптимальному фазовому фильтру, который предлагается в нашей работе, в которой сравнивается формирование ИОВ с помощью 1) амплитудно-фазового светового поля, описываемого модой Бесселя, ограниченной по радиусу, 2) с помощью оптимального фазового светового поля, описанного в [5] и 3) фазового поля, сформированного с помощью конического аксикона и СФП [2].

## 2. Формирование "идеального" оптического вихря с помощью амплитудно-фазового оптического элемента

"Идеальный" оптический вихрь [1] имеет комплексную амплитуду вида:

$$E_0(\rho, \theta) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(in\theta), \quad (1)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в Фурье-плоскости сферической линзы,  $n$  – топологический заряд оптического вихря. Из (1) видно, что радиус бесконечно тонкого кольца  $\rho_0$  не зависит от топологического заряда. Сформировать ИОВ (1) можно с помощью идеальной моды Бесселя на фокусном расстоянии от сферической линзы:

$$F_0(r, \varphi) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (2)$$

где размерный параметр  $\alpha = k\rho_0/f$  задает масштаб функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка  $J_n(x)$ . Радиус кольца с максимальной интенсивностью равен  $\rho_0 = \alpha f/k$ , где  $k$  – волновое число монохроматического когерентного света,  $f$  – фокусное расстояние линзы.

Для формирования поля (2) нужно использовать амплитудную маску. Кроме того, на практике функция Бесселя в (2) ограничена круглой апертурой или освещается гауссовым пучком. Обе эти причины приводят к искажению ИОВ, низкой энергетической эффективности, слабой зависимости максимальной интенсивности на кольце от топологического заряда и уширению кольца.

### 3. Формирование "идеального" оптического вихря с помощью оптимального фазового оптического элемента

Под оптимальным мы понимаем такой оптический элемент, который направляет наибольшую часть света в кольцо заданного радиуса. Пропускание такого элемента равно [5]:

$$F_2(r, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \text{sgn} J_n(\alpha r) \exp(in\varphi). \quad (3)$$

Поле в фокусе линзы от комплексной амплитуды (3) имеет вид:

$$E_2(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \int_{r_m}^{r_{m+1}} J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr, \quad (4)$$

где  $r_0=0$ ,  $r_m = \gamma_{n,m}/\alpha$ ,  $m=1,2,\dots,N$ ,  $r_N = R$ . Если положить в (4)  $\rho = \alpha f/k$ , то аргумент функции Бесселя в (4) не будет зависеть от параметров  $f$  и  $k$  и будет равен  $\alpha r$ . Можно показать, что при  $\rho_0 = \gamma_{n,N} f / (kR)$  все слагаемые суммы будут положительны, и вклад в поле на кольце радиуса ИОВ будет максимальный. Чтобы радиус кольца ИОВ не зависел от топологического заряда надо выбирать близкие корни функции Бесселя, аналогично:  $\gamma_{n,N} = \gamma_{m,M}$ .

### 4. Формирование "идеального" оптического вихря с помощью конического аксикона

В [2] ИОВ формируется с помощью конического аксикона и СФП. Это эквивалентно прохождению света через оптический элемент с комплексной функцией пропускания

$$F_3(r, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp(i\alpha r + in\varphi). \quad (5)$$

Оптический элемент (5) впервые был рассмотрен в [6] для формирования световых трубок. Здесь  $\alpha$  уже не масштабный параметр функции Бесселя, а параметр аксикона, связанный с углом при вершине формируемой конической волны. В [2] предполагают, что световое поле (5) будет формировать в фокусе сферической линзы ИОВ, распределение амплитуды которого описывается функцией  $E_3(\rho, \theta) \propto \exp\left[-(\rho - \rho_0)^2 / \Delta\rho^2\right] \exp(in\theta)$ . Это сильное упрощение, и на самом деле комплексная амплитуда ИОВ в фокусе сферической линзы описывается как Фурье-преобразование от функции (5) и имеет гораздо более сложный вид [6]. При этом интенсивность на кольце будет меньше, чем для оптимального элемента (3), но больше, чем для амплитудного элемента. Интенсивность на кольце зависит от величины топологического заряда, а ширина кольца примерно в два раза больше, чем в предыдущих случаях.

### 5. Результаты моделирования

В данном разделе приведены результаты моделирования формирования ИОВ с помощью рассмотренных выше оптических элементов. Моделирование проводилось при следующих параметрах: длина волны излучения  $\lambda = 532$  нм, радиус круглой апертуры  $R = 20\lambda$ , фокусное расстояние идеальной сферической линзы  $f = 100\lambda$ , масштабный параметр функции Бесселя  $\alpha$  был выбран таким образом, что выполнялось равенство:  $\alpha R = \gamma_{1,20} = 63,6114$ , где  $\gamma_{1,20}$  – 20-ый корень функции Бесселя ( $\nu=20$ ) первого порядка ( $n=1$ ). Проводилось сравнение формирования ИОВ для двух разных топологических зарядов  $n=1$  и  $n=14$ . Остальные параметры моделирования сохранялись. При этом, для функции Бесселя 14-го порядка ( $n=14$ ) выбирался 14-ый корень ( $\nu=14$ ), так как  $\gamma_{14,14} \approx \gamma_{1,20} = 63,6114$ . На рис. 1 показаны модули двух функций Бесселя  $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$  и  $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$ . Из рис. 1 видно, что при  $x=R$  обе функции Бесселя имеют ноль.

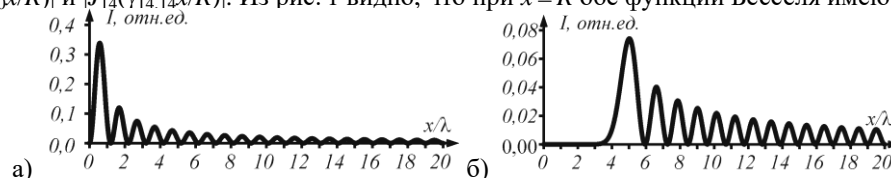


Рис. 1. Модули функций Бесселя  $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$  (а) и  $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$  (б), ограниченные радиусом  $R$ .

На рис.2 показаны распределения интенсивности ИОВ в Фурье-плоскости сферической линзы, полученные при начальном световом поле в виде ограниченной моды Бесселя. Характеристики рассчитанных ИОВ приведены в Табл. 1. Из Табл. 1 видно, что радиус ИОВ при изменении топологического заряда не изменился. Радиус кольца ИОВ при выбранных параметрах равен  $\rho_0 \approx 50,62\lambda$ . Это значение отличается от значения в Табл. 1 всего на 3%. Максимальная интенсивность

ИОВ уменьшилась всего на 5% при увеличении топологического заряда вихря почти на порядок. Заметим, что согласно теории при выбранных параметрах моделирования максимальная интенсивность на рис. 2 должна быть равна  $I_1(\rho_0) = [kR/(\pi\alpha f)]^2 \approx 0,015816$ . Это согласуется со значением из Табл. 1. И так как радиус кольца не изменился и радиус апертуры  $R$  оптического элемента тоже не изменился, то не должна измениться и ширина кольца. Из Табл. 1 видно, что действительно, ширина кольца не меняется при изменении топологического заряда оптического вихря. Согласно теории ширина кольца при выбранных параметрах моделирования должна быть равна  $\text{FWHM} = 5/2\lambda$ . Это значение на 11% отличается от значения ширины кольца из Табл. 1.

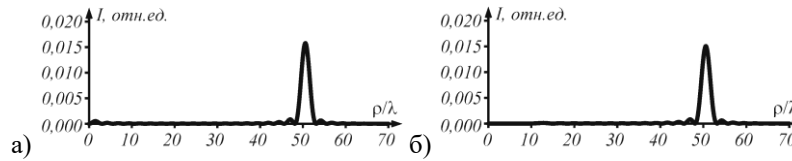


Рис. 2. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля в виде моды Бесселя.

Таблица 1. Сравнение параметров ИОВ, сформированного начальным световым полем в виде ограниченной моды Бесселя при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,781563	50,781563
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,0157968	0,0150522
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	2,244489	2,244489

Рассмотрим теперь формирование ИОВ с помощью оптимального фазового элемента (3). На рис. 3 показаны распределения интенсивности ИОВ для начального светового поля (3). В Табл. 2 приведены рассчитанные параметры ИОВ на рис. 3. Из Табл. 2 видно, что радиус кольца ИОВ стал немного меньше, чем на рис. 2 (меньше всего на 0,3%). Радиус не изменился при увеличении топологического заряда в 14 раз. Интенсивность на кольце почти в 100 раз больше, чем интенсивность для ИОВ на рис. 2. Заметим, что с увеличением топологического заряда в 14 раз интенсивность на кольце уменьшилась всего на 2%. Толщина кольца стала меньше примерно на 14% по сравнению с шириной кольца на рис. 2. Толщина кольца сохраняется при изменении топологического заряда оптического вихря. Из рис. 3 видно, что увеличились боковые лепестки.

Далее рассмотрим формирование ИОВ с помощью вихревого аксикона (5). На рис. 4 показаны распределения интенсивности ИОВ для начального светового поля (5), а в Табл. 3 внесены рассчитанные параметры этого ИОВ. Из рис. 4 и Табл. 3 видно, что ширина кольца ИОВ примерно в 2,5 раза больше, чем ширина кольца на рис. 2.

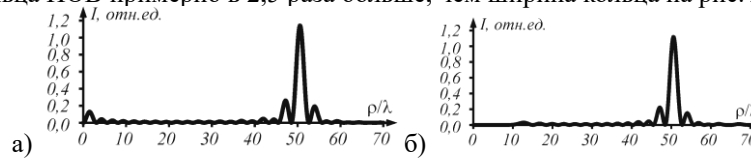


Рис. 3. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (3). По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн.

Таблица 2. Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым фильтром (3) при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,641283	50,641283
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	1,140685	1,1181689
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	1,9639279	1,9639279

И кроме того, с увеличением топологического заряда вихря в 14 раз ширина кольца увеличивается в 1,3 раза.

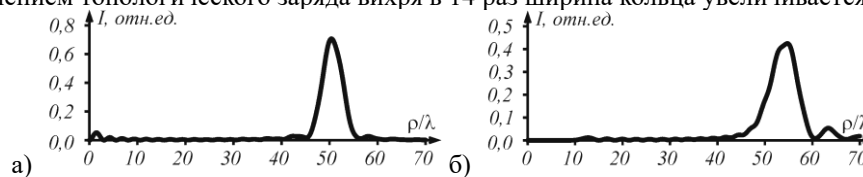


Рис. 4. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (5). По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн.

Увеличение ширины кольца (рис. 4) с ростом номера  $n$  приводит к уменьшению интенсивности на этом кольце. Из Табл. 3 видно, что максимальная интенсивность на кольце ИОВ (рис. 3) уменьшается в 1,7 раз с ростом номера  $n$  в 14 раз. И даже сам радиус кольца с максимальной интенсивностью увеличивается при это на 8%. При этом толщина кольца и

максимальная интенсивность почти не меняются при увеличении топологического заряда оптического вихря с 1 до 14. Единственным недостатком ИОВ, сформированного элементом (3), являются повышенный уровень боковых лепестков, которые составляют около 20% от максимальной интенсивности.

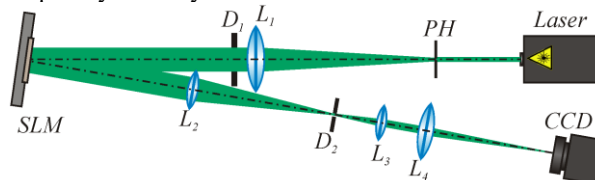
**Таблица 3.** Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым фильтром (5) при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,501002	54,849699
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,7070332	0,4249419
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	4,9098196	6,5931864

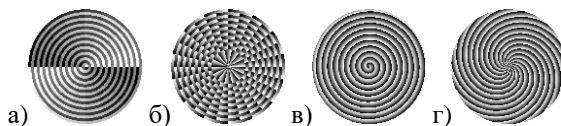
Таким образом, моделирование показало, что из трёх рассмотренных вариантов формирования ИОВ оптимальный фазовый фильтр (3) является лучшим вариантом, так как в этом случае формируется наиболее узкое световое кольцо (FWHM =  $1,96\lambda = 0,39\lambda_f/R$ ) с максимальной интенсивностью на кольце, в 1,6 раз большей, чем при использовании вихревого аксикона (5).

## 6. Эксперимент

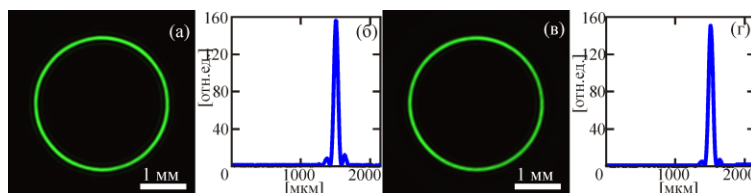
Для экспериментального исследования элементов, формирующих идеальные оптические вихри (ИОВ), мы использовали оптическую схему, показанную на рис. 5. В качестве источника излучения был выбран твердотельный лазер  $L$  ( $\lambda = 532$  нм), формирующий фундаментальный гауссов пучок. Пучок лазера, расширенный и коллимированный с помощью системы, состоящей из пинхола  $PH$  (размер отверстия 40 мкм) и линзы  $L_1$  ( $f_1 = 250$  мм), падал на дисплей модулятора  $SLM$  (PLUTO VIS, разрешение 1920x1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм). Диафрагма  $D_1$  была использована для того, чтобы отделить центральное светлое пятно от окружающих его светлых и темных колец, возникающих при дифракции на пинhole. Далее с помощью системы линз  $L_2$  ( $f_2 = 350$  мм) и  $L_3$  ( $f_3 = 150$  мм) и диафрагмы  $D_2$  мы осуществляли пространственную фильтрацию промодулированного по фазе лазерного пучка, отражённого от дисплея модулятора. С помощью линзы  $L_4$  ( $f_4 = 500$  мм) лазерный пучок фокусировался на матрице видеокамеры  $CCD$  LOMO TC 1000 (размер пикселя 1,67x1,67 мкм). Для формирования идеальных оптических вихрей мы использовали фазовые шаблоны, показанные на рис. 6, которые выводились на дисплей модулятора света. Для того чтобы разнести в пространстве непромодулированный пучок, отражённый от модулятора, и промодулированный по фазе пучок, на исходный фазовый шаблон элемента мы дополнительно накладывали линейную фазовую маску.



**Рис. 5.** Экспериментальная схема установки:  $L$  – твердотельный лазер ( $\lambda = 532$  нм),  $PH$  – пинхол (размер отверстия 40 мкм),  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  – линзы с фокусными расстояниями ( $f_1 = 250$  мм,  $f_2 = 350$  мм,  $f_3 = 150$  мм,  $f_4 = 500$  мм),  $D_1$  и  $D_2$  – диафрагма,  $SLM$  – пространственный модулятор света PLUTO VIS,  $CCD$  – видеокамера LOMO TC-1000.



**Рис. 6.** Фазовые шаблоны оптических элементов для формирования ИОВ с топологическим зарядом  $n=1$  (а, в) и  $n=14$  (б, г). На рисунках (а, б) представлены оптимальные фазовые элементы, на рисунках (в, г) – вихревые аксиконы.



**Рис. 7.** Распределения интенсивности ИОВ и соответствующие им сечения от центра картинки до края в случае использования оптимального фазового фильтра с топологическим зарядом  $n=1$  (а), (б) и  $n=14$  (в), (г).

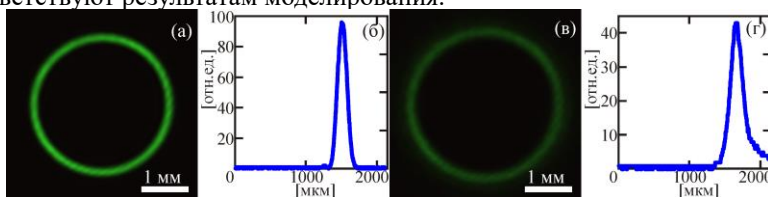
На рис. 7 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы  $L_4$  с помощью фазовых масок, соответствующих оптимальным фазовым фильтрам с топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в таблице 4.

**Таблица 4.** Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым фильтром с топологическим зарядом  $n=1$  и  $n=14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	1491,0±2,0	1496,5±2,0
Максимальная интенсивность, усл. ед.	156,0±0,5	151,0±0,5
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	70,0±2,0	73,0±2,0

На рис. 8 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы  $L_4$  с помощью фазовых масок, соответствующих вихревым аксиконам с топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в таблице 5.

Из анализа экспериментальных измерений параметров ИОВ следует, что относительные значения параметров сформированных пучков соответствуют результатам моделирования.



**Рис. 8.** Распределения интенсивности ИОВ и соответствующие им сечения от центра картинке до края в случае использования вихревого аксикона с топологическим зарядом  $n=1$  (а), (б) и  $n=14$  (в), (г).

**Таблица 5.** Сравнение параметров ИОВ, сформированного вихревым аксиконом с топологическим зарядом  $n=1$  и  $n=14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	1498,0±2,0	1655,0±2,0
Максимальная интенсивность, усл. ед.	96,0±0,5	43,0±0,5
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	158,0±2,0	206,0±2,0

## 7. Заключение

В работе рассмотрено формирование идеального оптического вихря тремя разными оптическими элементами: амплитудно-фазовым с пропусканием пропорциональном моде Бесселя, оптимальным фазовым и вихревым аксиконом. Показано, что применение любого из этих трёх оптических элементов приводит к формированию светлых колец с одним и тем же радиусом, который слабо зависит от топологического заряда оптического вихря. Интенсивность света на кольце больше (при прочих равных условиях) для оптимального фазового элемента. Интенсивность всех трёх колец слабо зависит от величины топологического заряда. Ширина светового кольца, сформированного вихревым аксиконом, примерно в два раза больше, чем ширина двух других колец. Таким образом, оптимальный фильтр (3), рассмотренный впервые в [3], является наилучшим кандидатом для формирования идеального оптического вихря.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9) и молодых кандидатов наук (МК-2390.2017.2), а также грантов РФФИ 15-07-01174, 15-47-02492, 16-29-11698, 15-47-630483.

## Литература

- [1] Ostrovsky, A.S. Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator / A.S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, V. Arrizon // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38(4). – P. 534-536.
- [2] Chen, M. Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam / M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E.M. Wright, K. Dholakia // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38(22). – P. 4919-4922.
- [3] Li, P. Generation of perfect vectorial vortex beams / P. Li, Y. Zhang, S. Liu, C. Ma, L. Han, H. Cheng, J. Zhao // Opt. lett. – 2016. – Vol. 41(10). – P. 2205-2208.
- [4] García-García, J. Simple technique for generating the perfect optical vortex / J. García-García, C. Rickenstorff-Parrao, R. Ramos-García, V. Arrizón, and A. Ostrovsky // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(18). – P. 5305-5308.
- [5] Fedotowsky, A. Optimal filter design for annular imaging / A. Fedotowsky, K. Lehovc // Applied Optics. – 1974. – Vol. 13(12). – P. 2919-2923.
- [6] Kotlyar, V.V. Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, O.Y. Moiseev, V.A. Soifer // Journal of the Optical Society of America A. – 2007. – Vol. 24(7). – P. 1955-1964.