Двухмасштабный анализ в решении задачи сглаживания изображений

П.А. Чочиа

Институт проблем передачи информации РАН, 127051, Б. Каретный пер. 19, Москва, Россия

Аннотация

Проведено сравнительное исследование методов сглаживания изображений, основанных на использовании парзеновского окна оценивания. Продемонстрирована близость сигма-фильтра и билатерального фильтра. Показано, что применение двухмасштабной процедуры анализа, используемой в алгоритме декомпозиции, позволяет получить значительно более точные результаты сглаживания изображений.

Ключевые слова: сглаживание изображений; парзеновское оценивание; сигма-фильтр; билатеральный фильтр; алгоритм декомпозиции; двухмасштабный анализ

1. Введение

Одной из традиционных задач при обработке и анализе видеоинформации является задача сглаживания сигнала изображения. Основная сложность при этом состоит в сохранении границ и контурных перепадов между областями, соответствующими наблюдаемым объектам сцены. Протяженная анализируемая сцена может быть весьма неоднородна по составу объектов, а, следовательно, и по распределениям их яркостей и цвета. Поэтому актуальными представляются методы, использующие при сглаживании пространственно ограниченную, локальную область (окно) анализа.

В локальную область анализа могут попадать одна или несколько областей изображения. Распределение значений элементов области будет представлять смесь нескольких независимых распределений, соответствующих отдельным областям, каждое их которых допустимо считать независимым.

В ситуации смеси нескольких распределений, эффективным способом решения задачи нахождения сглаженного значения в точке является применение метода парзеновских окон [1,2], суть которого состоит во введении локальности анализа не только в пространственной области, но также и в области значений. На основе данного подхода, используя анализ по локальному фрагменту, разработано несколько известных алгоритмов сглаживания изображений, сохраняющих контурные перепады: а) сигма-фильтр Ли [4]; б) билатеральный фильтр [7]; в) алгоритм декомпозиции [5,6,9]. Парзеновские методы оценивания продолжают привлекать внимание как применительно к сглаживанию изображений, так и в других задачах их обработки [10,11]. Тем не менее, сравнительный анализ указанных методов до настоящего времени проведен не был.

2. Модель фрагмента изображения

Будем рассматривать изображение как совокупность непересекающихся, достаточно гладких связных областей, отличающихся по яркостным свойствам от соседних областей и разделенных контурными перепадами. Также будем полагать, что набор областей плотно покрывает двумерное пространство, на котором изображение задано. Согласно исследованию [12], основную долю площади изображения занимают протяженные области, содержащие от 10² до 10⁴ и более элементов каждая. Очевидно, что произвольно взятое локальное окно (фрагмент) может попадать как целиком внутрь некоторой большой области, так и захватывать участки двух или более независимых областей, или даже полностью покрывать небольшие области.

Яркости каждой из областей и значения входящих в них элементов, как правило, соответствуют различным объектам наблюдаемой сцены, поэтому их можно считаться статистически независимыми, даже если расстояния между ними невелики. В то же время элементы, относящиеся к одной и той же области, статистически зависимы на достаточно больших расстояниях — по крайней мере, в пределах размеров окна анализа.

Согласно двухмасштабной модели фрагмента [5,8], изображение представимо в виде суммы трех компонент: гладкой s_{ij} , текстурной t_{ij} и шумовой ξ_{ij} . При этом гладкие составляющие тех частей *R* областей, которые попадают во фрагмент, описываются полиномом степени не выше ω :

$$s_{ij}^{r}(W_{mn}) = \sum_{r=1}^{R} \delta_{r} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{pq}^{r} i^{p-q} j^{q} ; \qquad (1)$$

здесь (i,j) — точка фрагмента W_{mn} ; б — индикаторная функция множества: $\delta_r = 1$, если $(i,j) \chi U^r$ и $\delta_r = 0$ в остальных случаях. Вводя в (1) текстурную t_{mn} и шумовую ξ_{mn} составляющие, получим:

$$x_{ij}^{r} = \sum_{r=1}^{R} \delta_{r} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{pq}^{r} i^{p-q} j^{q} + t_{ij}^{r} + \xi_{ij} \right).$$
⁽²⁾

На большинстве реальных изображений средние яркости областей на протяжении типичного окна анализа меняются мало [8] и могут считаться постоянными. Такое допущение приводит к кусочно-постоянной модели с $\omega = 0$. Тогда $s_{ii}^r(W_{mn}) = s_{mn}^r$ и (2) преобразуется к виду:

$$x_{ij}^{r} = \sum_{r=1}^{R} \delta_{r} \left(s_{mn}^{r} + t_{ij}^{r} + \xi_{ij} \right).$$
(3)

Это формула кусочно-постоянной модели фрагмента, представляющая участки областей изображения, попадающие во фрагмент W_{mn} . При смещении фрагмента меняются доли областей, покрываемых фрагментом и, вообще говоря, $s_{mn}^r \neq s_{m+\Delta m,n+\Delta n}^r$. Считая t и ξ несмещенными и нормально распределенными, их сумма $\tau = t + \xi$ также распределена нормально: $N(0, \sigma_{\tau}^2)$, причем $\sigma_{\tau}^2 = \sigma_t^2 + \sigma_{\xi}^2$. Тогда (3) упрощается до

$$x_{ij}^{r} = \sum_{r=1}^{R} \delta_{r} \left(s_{mn}^{r} + \tau_{ij}^{r} \right).$$
(4)

Такая модель проста, близка большинству реальных изображений [5][8] и удобна для построения различных алгоритмов фильтрации, в том числе ранговых. Если фрагмент покрывает лишь одну область изображения, распределение x_{ij}^r будет одномодовым. Если же фрагмент покрывает участки двух или более (*R*) областей, то число мод распределения может достигать *R*. Положения мод определяются средними значениями s^1, \ldots, s^R участков областей U^1, \ldots, U^R , попадающих во фрагмент, а мощности мод — долей площади, занимаемой каждой областью во фрагменте.

Таким образом, задача сглаживания изображения сводится к отысканию компоненты s_{mn}^1 в (4), считая, что точка (m,n) принадлежит центральной области U^1 фрагмента.

3. Методы сглаживания на основе парзеновского оценивания

Из модели фрагмента ясно, что для нахождения сглаженного значения в центральной точке (m,n), попадающей в некоторую область U^1 фрагмента, необходимо по $h^1(k)$ — распределению значений элементов в U^1 — найти соответствующее значение s^1 . Т.е. задачу сглаживания можно ставить как определение положения моды (локального максимума) распределения, которая соответствует области U^1 , содержащей точку сглаживания (m,n). Такая формулировка типична для задач распознавания и классификации, использующих статистические модели [2,13]. Поскольку предполагается проводить операцию анализа независимо для каждого из элементов изображения, выбирать следует среди простейших и эффективных в вычислительном отношении методов.

Подходящим байесовским классификатором, позволяющим строить вычислительно эффективные алгоритмы, является метод парзеновского окна [1], в котором используется следующая функция оценивания:

$$f(u) = \frac{1}{Kw} \sum_{k=1}^{K} F\left(\frac{x_k - u}{w}\right),\tag{5}$$

где F(x) — ядро анализа (весовая функция), w — параметр ширины ядра. На этой идее основаны многие известные алгоритмы классификации, например, метод ближайших соседей. При этом известно [3], что вид весовой функции F практически не влияет на точность классификации; определяющим же является параметр его ширины w.

Парзеновский подход можно применить для оценивания положения моды по множеству элементов x_k ($1 \le k \le K$) области анализа:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{K} x_k F(x_k - x_0) \bigg/ \sum_{k=1}^{K} F(x_k - x_0),$$
(6)

где F(z) — выбранная весовая функция, а x_0 — опорное значение в точке (*m*,*n*).

На принципах парзеновского оценивания построен ряд алгоритмов анализа, в том числе рассматриваемые ниже алгоритмы сглаживания: сигма-фильтр Ли, алгоритм билатеральной фильтрации и алгоритм декомпозиции.

3.1. Сигма-фильтр

В случае выбора прямоугольных форм области анализа W_{mn} и весовой функции, когда F(z) = 1 для $x_0 - \delta \le z \le x_0 + \delta$, и F(z) = 0 для остальных z, а также использовании значения центрального элемента области анализа x_{mn} в качестве x_0 , получим известный сигма-фильтр Ли [4]:

$$S_{mn} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{mn}^{k}, \quad x_{mn} - \delta, \le x_{mn}^{k} \le x_{mn} + \delta.$$
(7)

Здесь K — число точек области W_{mn} , попадающих в диапазон $x_{mn} \pm \delta$. Предлагается использовать $\delta = 2\sigma$, где σ^2 дисперсия шума [4]. В [14] сигма-фильтр отмечен как один из лучших фильтров, дающих удовлетворительное сглаживание при сохранении контурных перепадов.

3.2. Билатеральная фильтрация

Алгоритм билатеральной фильтрации [7], по сути, является расширением сигма-фильтра (7) возможностью выбора форм весовой функции F(z) и области анализа w(d). Для предлагаемых в [7] гауссовых форм F(z) и w(d) получим:

$$F(z) = \frac{1}{\sigma_F \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(z-x_0)^2}{2\sigma_F^2}}; \quad w(d_k) = \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_k^2}{2\sigma_w^2}}, \text{ где } d_k^2 = (m_k - m)^2 + (n_k - n)^2.$$

Тогда:

$$S_{mn} = \sum_{x_{mn}^{k} \in W_{mn}} e^{-\left(\frac{(w^{r} - x_{0})^{2}}{2\sigma_{F}^{2}} + \frac{d_{r}^{2}}{2\sigma_{w}^{2}}\right)} x_{mn}^{k} / \sum_{x_{mn}^{k} \in W_{mn}} e^{-\left(\frac{(w^{r} - x_{0})^{2}}{2\sigma_{F}^{2}} + \frac{d_{r}^{2}}{2\sigma_{w}^{2}}\right)}.$$
(8)

3.3. Декомпозиция

Алгоритм декомпозиции [5,6,9] принципиально отличается приведенных выше тем, что анализ проводится не в один, а в два этапа: сначала по окрестности малого масштаба V_{mn} размерами 3–5 шагов дискретизации, а затем по окружающему фрагменту большого масштаба, который может превышать размеры окрестности в 3-5 и более раз.

Формулировка алгоритма декомпозиции следующая. Задаются размеры $l \times l$ окрестности V_{mn} и $L \times L$ (l < L) фрагмента W_{mn} , ширина яркостных интервалов анализа δ^{V} и δ^{W} , а также параметры отсечения $n^{V} < l^{2}/2$ и $n^{W} < L^{2}/2$. Для каждой точки (*m*,*n*) изображения выполняются следующие операции:

1. Находятся распределения значений элементов по окрестности H_{mn}^V и фрагменту H_{mn}^W с центрами в (m,n). 2. По H_{mn}^V и заданному n^V вычисляются ранговые параметры $R_1^V = R^V(n^V/l^2)$ и $R_2^V = R^V(1 - n^V/l^2)$, где R(x) — решение уравнения $\sum_{i=0}^{R(x)} h_{mn}^{V}(i) = x$. Усеченное значение \tilde{x}^{V} находится сравнением x_{mn} с R_{1}^{V} и R_{2}^{V} : $\tilde{x}^{V} = x_{mn}$, если $R_{1}^{V} \leq x_{mn} \leq R_{2}^{V}$; $\tilde{x}^{V} = R_{1}^{V}$, если $x_{mn} < R_{1}^{V}$; и $\tilde{x}^{V} = R_{2}^{V}$, если $x_{mn} > R_{2}^{V}$.

3. По значениям $x_{mn}^{i} \chi V_{mn}$ (*i*=1,...,*I*) в интервале $\tilde{x}^{V} \pm \delta^{V}$ подсчитывается среднее:

$$\overline{x}_{nm} = \mathbf{A}(V_{nm}, x_{nm}, n^V, \delta^V) = \sum_{i=1}^{I} x_{nm}^i / I, \quad \tilde{x}^V - \delta^V \le x_{nm}^i \le \tilde{x}^V + \delta^V.$$

4. Аналогично п. 2, по распределению H_{mn}^W и заданному n^W находятся $R_1^W = R^W(n^W/L^2)$ и $R_2^W = R^W(1 - n^W/L^2)$. Сравнением \overline{x}_{mn} с R_1^W и R_2^W определяется усеченное значение \tilde{x}^W : $\tilde{x}^W = \overline{x}_{mn}$, если $R_1^W \le \overline{x}_{mn} \le R_2^W$; $\tilde{x}^W = R_1^W$, если $\overline{x}_{mn} < R_1^W$; и $\tilde{x}^W = R_2^W$, если $\overline{x}_{mn} > R_2^W$.

5. Сглаженное значение S_{mn} определяется по H_{mn}^W как среднее значение K элементов из W_{mn} , попадающих в интервал $\tilde{x}^{W} \pm \delta^{W}$:

$$S_{mn} = \mathbf{A}(W_{mn}, \overline{x}_{mn}, n^W, \delta^W) = \sum_{k=1}^{K} x_{mn}^k / K, \quad \tilde{x}^W - \delta^W \le x_{mn}^k \le \tilde{x}^W + \delta^W.$$
(9)

Полученная величина S_{mn} считается сглаженным значением в точке (m,n).

4. Сравнение методов сглаживания

Провести численные сравнения методов сглаживания на реальных изображениях затруднительно, поэтому было сформировано тестовое изображение размерами 100×100 элементов, содержащее две протяженные области постоянной яркости с перепадом в 100 градаций, которое искажалось гауссовым шумом с СКО 30 градаций. Искаженное изображение затем подвергалось фильтрации описанными выше методами.

На Рис. 1 приведены результаты сглаживания указанного тестового изображения, сопровождаемые графиками одной и той же строки. На рисунке (а) приведено зашумленное изображение, подвергаемое сглаживанию. Изображения (б), (в) и (г) обработаны сигма-фильтром (7), билатеральным фильтром (8) и алгоритмом декомпозиции (9) соответственно с размерами фрагмента сглаживания 21×21 элементов при четырех итерациях. Для сравнения на (д) и (е) показаны результаты сглаживания хорошо известными фильтрами локального среднего и локальной медианы по фрагменту того же размера с одной итерацией.

Возникает вопрос оценивания качества результата. Самым распространенным способом является измерение величины среднеквадратического отклонения сглаженного изображения от оригинала без шума. Такая оценка, безусловно, не является мерой гладкости, но применительно к выбранному в данном случае тестовому изображению, состоящему из двух константных участков, ее применение вполне оправданно.

Зависимости точности восстановления сигнала (среднеквадратического отклонения, СКО) от вида фильтра и размеров окна сглаживания, измеренные для того же изображения на Рис. 1(а), показаны графиками на Рис. 2. Нетрудно заметить, что каждый из трех видов сглаживания формирует отдельный пучок линий. При этом линии, соответствующие билатеральному фильтру (верхний пучок линий) и сигма-фильтру (средний пучок) расположены сравнительно близко — их точности отличаются всего на 15-20%, в то время как линии, соответствующие фильтру декомпозиции (нижний пучок линий), располагаются отдельно и демонстрируют в 2–3 раза более точное восстановление.



Рис. 1. Сглаживание различными фильтрами: а) исходное изображение с гауссовым шумом; б) сигма-фильтр;
 в) билатеральный фильтр; г) декомпозиция; д) локальное среднее; е) локальная медиана.

Как видно из примеров на Рис. 1 и графиков на Рис. 2, в сравнении с билатеральным фильтром сигма-фильтр имеет лучшие характеристики. Выбранное выше тестовое изображение (две протяженные области) является сигналом, на котором должна наблюдаться наибольшая разница между билатеральным фильтром и сигма-фильтром. В случае объектов меньших размеров, сопоставимых с размерами фрагмента анализа, разница между фильтрами нивелируется. Это объясняется тем, что в подобной ситуации пространственная область, по которой реально производится усреднение, определяется формой самих деталей, в результате чего выбор формы пространственного окна становится менее существенным.



Рис. 2. Зависимость точности восстановления сигнала от изменения эффективной шириной окна для различных методов сглаживания.

Значительно лучшие характеристики демонстрирует алгоритм декомпозиции изображения, что говорит о том, насколько важно предварительное оценивание по окну малого размера.

Возможен также другой способ оценивания, когда гладкость интерпретируется ее как сложность сигнала. В такой ситуации можно воспользоваться оценками двумерной вариации. Согласно [15], для функции двух переменных предлагается использовать два функционала, определяемых следующим образом:

$$w_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_t) dt , \qquad w_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(e_t) dt .$$
(10)

Здесь множество e_t — это t - уровень функции f(x,y), т.е. множество тех точек (x,y), в которых f(x,y) = t; $v_0(e_t)$ — число компонент множества e_t ; $v_1(e_t)$ — длина e_t (по Хаусдорфу). Тем самым значение w_1 характеризует число и выраженность локальных экстремумов функции. В случае дискретной функции f(i,j), двумерные вариации (10) будут выражаться следующими формулами [16]:

$$w_1(f) = \left(\sum_{x=0}^{T-1} v_0(e_t) / T\right) - 1 \quad \text{if} \quad w_2(f) = \left(\sum_{x=0}^{T-1} v_1(e_t) / T\right) - P(D),$$
(11)

где T — число возможных значений функции f(i,j) (для изображения — число градаций яркости), а P(D) — периметр области, по которой производится измерение. Будучи нормированным на величину диапазона T, значение w_1 является характеристикой числа и амплитуды объектов изображения, образующих в сечениях отдельные компоненты. Поэтому удобно назвать значение w_1 показателем числа объектов изображения.

Значение первой вариации w_1 отражает число и контраст деталей на изображении, а значение второй вариации, w_2 , сумму периметров деталей. Наряду с этим, важным является соотношение вариаций $q_w(f) = w_2(f)/w_1(f)$, которое отражает средний периметр деталей на изображении [16] (полагаем $w_1(f) > 0$, иначе $q_w(f) = 0$). В дискретном изображении наименьшим возможным объектом является один элемент. Значит минимально возможная компонента, из числа входящих в множество уровня e_t , имеет линейный размер равный одному шагу дискретизации, а ее периметр равен 4, т.е. значению, которое есть аналог числа π в метрике L_1 и является минимально возможным для соотношения периметр/площадь объекта. Предполагая, что в дискретном случае длина границ компонент, составляющих $v_1(e_t)$, измеряется в метрике L_1 , очевидно, что для $q_w(f)$ также существует минимально возможное значение, которое также равно 4. При этом минимум достигается, когда все компоненты множеств уровня e_t для всех t являются одноэлементными. В связи со сказанным удобно ввести нормированную характеристику

$$d(f) = q_w(f)/4 = w_2(f)/4w_1(f),$$

которую по аналогии с показателем числа объектов w_1 в (11) естественно назвать показатель размеров объектов изображения. При этом будет выполняться соотношение: $d(f) \ge 1$.

Оценка\Изображение Исходное б в e 6,37 СКО (градаций) 29,84 8,71 3,03 14,15 10.93 0,0 0,39 33,93 0,43 1,37 1,70 380,8 14,67 w_1 22.5 1.41 1.84 1.42 25.11 9.85 8.82 d

Таблица 1. Изменение значений СКО, показателя числа объектов *w*₁ и показателя размеров объектов *d* при сглаживании изображения (исходное изображение без шума, и изображения а–е на Рис. 1)

Как видно из Табл. 1, сигма-фильтр (б) и билатеральный фильтр (в) оставляют существенную часть шумовых выбросов не отфильтрованными (большие значения w_1 , малые d и значительные значения СКО). Локальное среднее (д) и медиана (е) показывают хорошее сглаживание (малые w_1 и большие d), но сам сигнал при этом значительно отличается от оригинала (большие СКО). Наилучшие результаты по всем параметрам, близкие к значениям неискаженного изображения, показывает алгоритм декомпозиции (г). То, что значение d для изображения (г) выше, чем для исходного, объясняется тем, что из-за высокого шума некоторые элементы на границе ошибочно отнесены к соседней области. В результате на границе появились выступы, а длина границы, соответственно, увеличилась.

5. Пример сглаживания реального изображения



Рис. 3. Сглаживание реального изображения: а) исходное изображение (аэрофотоснимок); б) результат сглаживания алгоритмом декомпозиции (9); в) разность изображений (а) и (б).

(12)

Иллюстрация сглаживания реального изображения (аэрофотоснимок) алгоритмом декомпозиции (9) приведена на Рис. 3. В нижней части изображений показаны графики одной и той же строки, положение которой отмечено рисками на изображении (а). Кроме того, в левом верхнем углу исходного изображения (а) показан размер фрагмента W_{mn} сглаживания, равный 25×25 элементов. Изображение (б) получено сглаживанием изображения (а) алгоритмом декомпозиции (9). На (в) приведены разность изображений (а) и (б), а также график разности для той же строки.

Нетрудно видеть, что протяженные детали (например, широкие полосы в верхней левой части изображения) и их контурные перепады полностью оказались в сглаженной компоненте (б). При этом на разностном сигнале (в) данные детали совершенно отсутствуют, зато содержатся текстура и мелкие детали.

6. Выводы

Проведен сравнительный анализ методов сглаживания изображений, основанных на использовании парзеновского окна оценивания. Показано, что по качеству сглаживания шума сигма-фильтр и билатеральный фильтр близки между собой, но сигма-фильтр демонстрирует несколько более высокие характеристики.

Существенно лучшие показатели сглаживания достигаются алгоритмом декомпозиции. Исследования показывают, что двухмасштабная процедура анализа — первоначально по окну малого, а затем по окну большого масштаба — позволяет получить значительно более точные результаты сглаживания изображений.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Литература

- [1] Parzen, E. On Estimation of a Probability Density Function and Model / E. Parzen // Annals of Mathematical Statistics, 1962, vol. 33, pp. 1065–1076.
- [2] Дуда, Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт М.: Мир, 1976. 511 с.
- [3] Лагутин, М.Б. Наглядная математическая статистика: Учебное пособие / М.Б. Лагутин М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. 472 с.
- [4] Lee, J.-S. Digital Image Smoothing and the Sigma Filter / J.-S. Lee // Computer Vision, Graphics, Image Processing, 1983, vol. 24, no. 2. pp. 255–269.
 [5] Чочиа, П.А. Обработка и анализ изображений на основе двухмасштабной модели: Препринт ИППИ АН СССР / П.А. Чочиа М.: ВИНИТИ,
- 1986. 69 с.
 1986. 69 с.
 1986. 69 с.
- [6] Чочиа, П.А. Сглаживание изображения при сохранении контуров / П.А. Чочиа // Кодирование и обработка изображений М.: Наука, 1988, С. 87–98.
- [7] Tomasi, C. Bilateral filtering for gray and color images / C. Tomasi, R. Manduchi // Proc. IEEE 6th Int. Conf. on Computer Vision. Bombay, India, 1998, pp. 839–846.
- [8] Чочиа, П.А. Двухмасштабная модель изображения / П.А. Чочиа // Кодирование и обработка изображений М.: Наука, 1988, С. 69-87.
- [9] Chochia, P.A. Image Enhancement Using Sliding Histograms / P.A. Chochia // Computer Vision Graphics Image Processing, 1988, vol. 44, no. 2, pp. 211-229.
- [10] Kass, M. Smoothed Local Histogram Filters / M. Kass, J. Solomon // ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH 2010) vol. 29, no. 4, 2010, article 100.
- [11] Singh, M. Regression based Bandwidth Selection for Segmentation using Parzen Windows / M. Singh, N. Ahuja // Proc. Ninth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2003), vol. 1, pp. 2–9.
- [12] Nishikawa, S. Area Properties of Television Pictures / S. Nishikawa, R.J. Massa, J.C. Mott-Smith // IEEE Trans. IT-11, 1965, no. 3, pp. 348-352.
- [13] Журавлев, Ю.И. Распознавание образов и анализ изображений / Ю.И. Журавлев, И.Б. Гуревич // Искусственный интеллект: в 3-х книгах. Книга 2. Модели и методы: Справочник. М.: Радио и связь, 1990.
- [14] Mastin, G.A. Adaptive Filters for Digital Image Noise Smoothing: An Evaluation / G.A. Mastin // Computer Vision, Graphics, Image Processing, 1985, vol. 31. no. 1. pp. 103–121.
- [15] Кронрод, А.С. О функциях двух переменных / А.С. Кронрод // УМН, 1950, т. 5, № 1, С. 24–134.
- [16] Chochia, P.A. Comparison of Two-Dimensional Variations in the Context of the Digital Image Complexity Assessment / P.A. Chochia, O.P. Milukova // Journal of Communications Technology and Electronics, 2015, vol. 60, no. 12. pp. 1432-1440.