

# Динамика двух дипольно связанных сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с двумя независимыми компланарными резонаторами

М.М. Евсеев<sup>1</sup>, Е.К. Башкиров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** В рамках двойной модели Джейнса-Каммингса исследована динамика атом-атомного перепутывания двух дипольно-связанных сверхпроводящих кубитов, нерезонансно взаимодействующих с двумя независимыми модами резонаторных полей. Показано, что для сепарабельных начальных состояний кубитов расстройка влияет только на период осцилляций параметра перепутывания, а не на его максимальное значение. Установлено также, что максимальная степень перепутывания кубитов достигается в случае равных констант кубит-полевого взаимодействия.

## 1. Введение

Перепутанные состояния составляют фундамент современной квантовой информатики. В настоящее время выполнено огромное число экспериментальных и теоретических исследований перепутанных состояний систем кубитов различной физической природы. Квантовая электродинамика резонаторов (КЭР) является одним из возможных инструментов для изучения особенностей перепутывания кубитов, взаимодействующих с квантовыми электромагнитными полями. В последние годы в КЭР реализованы и детально изучены перепутанные состояния для ридберговских нейтральных атомов, захваченных ионов, сверхпроводящих джозефсоновских колец, квантовых точек и примесных спинов [1]. Одной из наиболее перспективных систем для целей квантовой информатики оказались сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами. Одно из главных направлений развития процессов квантовой информатики применительно к сверхпроводящим кубитам связано с изучением их взаимодействия с осцилляторами или резонаторами для преобразования, считывания и хранения информации [2]. В квантовой электродинамике резонаторов сверхпроводящие кубиты играют роль искусственных атомов, взаимодействующих с осцилляторами различной физической природы. При этом в настоящее время экспериментально рассмотрено взаимодействие сверхпроводящих кубитов как со сверхпроводящими  $LC$  контурами, так и с микроволновыми компланарными резонаторами. В первом случае в качестве "фотонов" резонатора выступают кванты колебаний электронной плотности в  $LC$  контуре или плазмоны, во втором случае – кубит взаимодействует с реальными и виртуальными фотонами микроволнового диапазона компланарного резонатора. Простейшие резонаторы  $LC$ -типа – это линейные резонаторы, состоящие из параллельно соединенных индуктивности и конденсатора. Однако в настоящее время для реализации моделей квантовой электродинамики сверхпроводящих кубитов в качестве резонаторов чаще используют сверхпроводящие

копланарные резонаторы. Основным элементом резонатора является микроволновый копланарный волновод, состоящий из центральной полосы, которая служит трансмиссионной линией для микроволновых сигналов, и двух внешних заземленных полос. В зависимости от интенсивности связи между кубитом и микроволновым полем возможна реализация как резонансного режима (расстройка частот кубита и резонатора мала), так и дисперсионного режима (расстройка частот кубита и резонатора велика). Если для рассмотренной системы изучается прохождение пробного сигнала как функция состояния кубита, то в случае дисперсионного режима у пробного сигнала меняется фаза, как и для случая с классическим осциллятором. В резонансном случае происходит обмен энергией между резонатором и кубитом, т.е. имеют место осцилляции Раби. Интенсивность связи между атомом и резонаторной модой определяется как дипольным моментом атомного перехода, так и интенсивностью поля. Сверхпроводящие кубиты имеют большие эффективные дипольные моменты, например для зарядового кубита эффективный дипольный момент примерно в 104 раза больше дипольного момента щелочного атома [3]. Кроме того, микроволновое поле копланарного 1D резонатора сосредоточено в гораздо меньшем объеме, нежели поле обычного 3D оптического или микроволнового резонатора. Это приводит к тому, что в таком резонаторе интенсивность поля примерно в 100 раз больше, чем для 3D резонатора. В результате сверхпроводящий кубит связан с электромагнитным полем резонатора гораздо сильнее, чем обычный атом. В результате для кубитов, взаимодействующих с электромагнитным полем в копланарном резонаторе, так же как и для кубитов, взаимодействующих с LC контурами, могут быть достигнуты режимы сильной и ультрасильной связи [3].

Теоретические исследования динамики сверхпроводящих кубитов в КЭР основаны на модели Джейнса-Каммингса и ее обобщениях [4]. Модель Джейнса-Каммингса и ее простейшие обобщения играют фундаментальную роль в квантовой оптике, поскольку позволяют описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с атомами. В частности, на примере двух- и многоатомной модели Джейнса-Каммингса можно исследовать особенности атомного перепутывания за счет взаимодействия атомов с различными бозонными полями. Эберли с соавторами предложили [5] так называемую двойную модель Джейнса-Каммингса (ДДКМ), состоящую из двух кубитов и двух независимых одномодовых резонаторов, при условии, что каждый кубит взаимодействует только с полем одного резонатора. В последнее время различные особенности динамики перепутывания кубитов в рамках ДДКМ были широко исследованы [6]-[9]. При этом авторы ограничились изучением динамики ДДКМ для перепутанных начальных состояний кубитов. Вместе с тем при наличии диполь-дипольного взаимодействия между кубитами перепутывание может возникать и для сепарабельных начальных состояний кубитов. Поэтому в настоящей работе мы исследовали динамику перепутывания двух дипольно-связанных сверхпроводящих кубитов в рамках ДДКМ с нерезонансным кубит-полевым взаимодействием для перепутанных начальных состояний кубитов.

## 2. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два сверхпроводящих джозефсоновских кубита, которые будем обозначать как А и В, с энергетической щелью  $\hbar\omega_0$  и две идентичные независимые резонаторные моды двух копланарных микроволновых резонаторов, которые будем обозначать как а и b, с частотами  $\omega_a = \omega_b = \omega$ . Кубит А нерезонансно взаимодействует с модой поля а, кубит В также нерезонансно взаимодействует с модой поля b. Для сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с микроволновыми полями копланарных резонаторов, эффективное диполь-дипольное взаимодействие может превосходить кубит-полевого взаимодействия [3]. В этом случае прямое диполь-дипольное взаимодействие между кубитами необходимо включить в гамильтониан модели. В системе отсчета, вращающейся с частотой моды поля,

гамильтониан системы в приближении вращающейся волны может быть представлен в виде

$$H = (1/2)\hbar\delta(\sigma_A^z + \sigma_B^z) + \hbar\gamma_a(\sigma_A^+ a + a^+ \sigma_A^-) + \hbar\gamma_b(\sigma_B^+ b + b^+ \sigma_B^-) + \hbar J(\sigma_A^+ \sigma_B^- + \sigma_A^- \sigma_B^+), \quad (1)$$

где  $(1/2)\sigma_i^z$  – оператор инверсии для  $i$ -го кубита ( $i = A, B$ ),  $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ , и  $\sigma_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$  – операторы переходов между возбужденным  $|+\rangle_i$  и основным  $|-\rangle_i$  состояниями в  $i$ -ом кубите,  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения фотонов моды  $a$ ,  $b^+$  and  $b$  – операторы рождения и уничтожения фотонов моды  $b$ ,  $\gamma_a \equiv \gamma$  – константа взаимодействия кубита  $A$  с модой  $a$  и  $\gamma_b$  – константа взаимодействия кубита  $B$  с модой  $b$ ,  $\delta = \omega - \omega_0$  – расстройка частот кубитов и полей резонаторов и  $J$  – константа диполь-дипольного взаимодействия.

Предположим, что кубиты в начальный момент времени находятся в сепарабельном состоянии

$$|\Psi(0)\rangle_A = |+, -\rangle, \quad (2)$$

а поля резонаторов – в вакуумном состоянии  $|0, 0\rangle$ .

Тогда полная начальная волновая функция системы есть

$$|\Psi(0)\rangle = |+, -\rangle_A \otimes |0, 0\rangle. \quad (3)$$

Временная волновая функция системы может быть вычислена как

$$|\Psi(t)\rangle = e^{iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle. \quad (4)$$

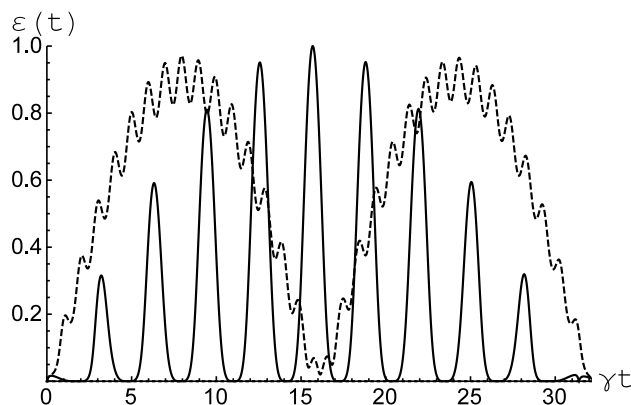
Нам удалось найти точное решение уравнения (4) для временной волновой функции в представлении ”одетых состояний”, т.е. собственных функций гамильтониана (1). Усредняя матрицу плотности полной системы  $\rho(t) = \Psi(t)\langle\Psi(t)|$  по полевым переменным, мы можем найти атомную матрицу плотности  $\rho(t)_A = Tr_F\rho(t)$ , и с ее помощью вычислить частично транспонированную по переменным одного кубита матрицу плотности  $\rho_A^{T_1}$ . Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности  $\rho_A(t)$ , в качестве меры перепутывания кубитов может быть использована отрицательность

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (5)$$

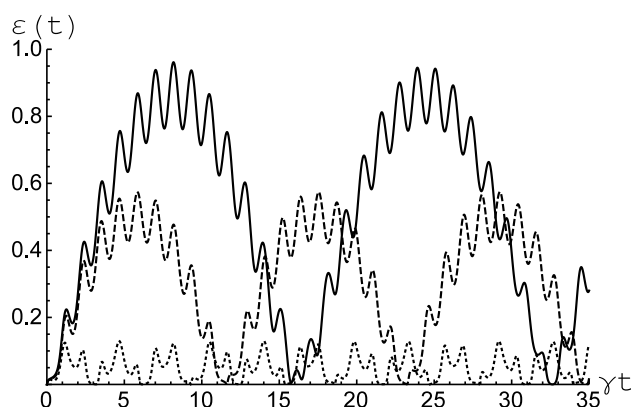
где  $\mu_i^-$  – отрицательные собственные значения матрицы плотности  $\rho_A^{T_1}$ . Результаты численного моделирования временной зависимости отрицательности (5) для начального состояния системы (3) представлены на Рис. 1 и 2.

### 3. Обсуждение результатов

На рис. 1 показана зависимость отрицательности от безразмерного времени  $\gamma t$  для фиксированной интенсивности диполь-дипольного взаимодействия  $J = 0.5g$  и разных значений параметра расстройки  $\delta$ . Из рисунка видно, что расстройка влияет только на период колебаний отрицательности, но не амплитуду таких колебаний, т.е. максимальная степень перепутывания кубитов не зависит от величины расстройки. Такое поведение параметра для рассматриваемой модели принципиально отличается от поведения параметра для двухатомной модели Джейнса-Каммингса с общим полем вакуумного резонатора. Для последней модели степень перепутывания кубитов существенно возрастает при увеличении расстройки частот кубитов и поля резонатора [10], [11]. На рис. 2 показана зависимость отрицательности от безразмерного времени  $\gamma t$  для фиксированной интенсивности диполь-дипольного взаимодействия  $J = 0.1g$  и разных значений параметра  $g$ , который определяет различие в параметрах взаимодействия двух кубитов с модами полей резонаторов  $g = \gamma_b/\gamma_a$ . Из рисунка видно, что с увеличением различия в константах кубит-полевого взаимодействия  $g$  максимальная степень перепутывания кубитов уменьшается, т. е. для рассматриваемой модели максимальное перепутывание имеет место для кубитов с равными константами кубит-полевого взаимодействия.



**Рисунок 1.** Временная зависимость отрицательности для безразмерного времени  $\gamma t$ . Расстройка  $\delta = 0$  (сплошная линия) и  $\delta/\gamma = 5$  (штриховая линия). Параметр диполь-дипольной связи  $J/\gamma = 0.5$ . Параметр  $g = 1$ , где  $g = \gamma b/\gamma$ .



**Рисунок 2.** Временная зависимость отрицательности для безразмерного времени  $\gamma t$ . Параметр  $g = 1$  (сплошная линия),  $g = 2$  (штриховая линия) и  $g = 4$  (точечная линия). Параметр диполь-дипольной связи  $J/\gamma = 0.1$ . Расстройка  $\delta/\gamma = 5$ .

#### 4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы исследовали динамику системы, состоящей из двух дипольно-связанных сверхпроводящих кубитов, каждый из которых нерезонансно взаимодействует с отдельной модой квантового микроволнового поля компланарного резонатора. При этом взаимодействие между модами двух компланарных резонаторов отсутствует. В представлении "одетых состояний" нами было найдено точное решение рассматриваемой модели и с его помощью исследована эволюция параметра атом-атомного перепутывания – отрицательности. Численное моделирование временной зависимости отрицательности показало, что для сепарабельных начальных состояний кубитов расстройка влияет только на период осцилляций параметра перепутывания, а не на его максимальное значение. Такое поведение параметра перепутывания принципиально отличается от его поведения в двухкубитной модели с общим полем одного резонатора [11]. В модели с общим полем резонатора наличие расстройки существенно увеличивает степень перепутывания кубитов. Установлено также, что максимальная степень перепутывания кубитов достигается в случае равных констант кубит-полевого взаимодействия. Полученные результаты могут быть использованы при вы-

боре наиболее эффективных схем управления сверхпроводящими кубитами в квантовых устройствах, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети.

## 5. Литература

- [1] Georgescu, I.M. Quantum simulation / I.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori // *Rev. Mod. Phys.* - 2014. - Vol. 88. - P. 153-185.
- [2] Xiu, G. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / G. Xiu, A.F. Kockum, A. Miranowicz, Y.-X. Liu, F. Nori // *Phys. Rep.* – 2017. – Vol. 718-719. - P. 1-102.
- [3] Blais, A. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation / A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf // *Phys. Rev. Lett.* - 2004. - Vol. A69. - P. 062320.
- [4] Shore, B.W. Jaynes-Cummings Model / B.M. Shore, P.L. Knight // *J. Mod. Opt.* – 1993. - Vol. 40. - P. 1195-1238.
- [5] Yonac, M.Y. Sudden death of entanglement of two Jaynes I, I Cummings atoms / M.Y. Yonac, T. Yu, J.H. Eberly // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* - 2006. - Vol. 39. - P. S621-S625.
- [6] Baghshahi, H.R. Entanglement criteria of two two-Level atoms interacting with two coupled modes / H.R. Baghshahi, M.Z. Tavassoly, M.J. Faghihi // *Int. J. Theor. Phys.* - 2015. – Vol. 54. - P. 2839-2854.
- [7] Zhu, W.-T. Entanglement dynamics of two qubits coupled independently to cavities in the ultrastrong coupling regime: analytical results / W.-T. Zhu, Q.-B. Ren, L.-W. Duan, Q.-H. Chen // *Chin. Phys. Lett.* - 2016. - Vol. 33. - P. 050302.
- [8] Evseev, M.M. Dynamics of two superconducting qubits interacting with two different quantum resonators / M.M. Evseev, E.K. Bashkirov // *SPIE Proc.* - 2017. - Vol. 10337. - P. 103370D.
- [9] Evseev, M.M. The influence of dipole-dipole interaction on entanglement of two superconducting qubits in the framework of double Jaynes-Cummings model / M.M. Evseev, E.K. Bashkirov // *J. Phys. Conf. Ser.* - 2017. - Vol. 917. – P. 062011.
- [10] Aguiar, L.S. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar, P.P. Munhoz, A. Vidiella-Barranco, J.A. Roversi // *J. Opt.* - 2005. - Vol. B7. - P. S769-S771.
- [11] Zhang, B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field / B. Zhang // *Opt. Commun.* - 2010. - Vol. 283. - P. 4676-4679.

## Dynamics of two dipole-coupled superconducting qubits interacting with two independent coplanar resonators

М.М. Evseev<sup>1</sup>, Е.К. Bashkirov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** Within the framework of the double Jaynes-Cummings model, the dynamics of the atom-atom entanglement of two dipole-coupled superconducting qubits interacting non-resonantly with two independent modes of the resonator fields was investigated. It is shown that for a separable initial states of qubits, the detuning affects only the period of entanglement oscillations, not the maximum value of entanglement. It was also established that for considered model the maximal amount of entanglement takes place for equal atom-field couplings.