Динамические модели планирования производственной деятельности в проектах освоения новой продукции

О.В. Павлов[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассмотрены динамические модели планирования объёмов производства в проектах освоения новой продукции на промышленном предприятии. В процессе освоения новой продукции проявляется эффект обучения, который приводит к уменьшению трудоемкости в зависимости от кумулятивного объема производства. Проблема динамического планирования производственной деятельности математически формализуется как задача оптимального управления производственной системой. Рассматриваются два варианта управления организационно-технической системой: в дискретном и непрерывном времени. Динамика изменения системы описывается дискретным и обыкновенным дифференциальным уравнениями. Для непрерывной задачи получено аналитическое решение с помощью принципа максимума Понтрягина.

1. Введение

В проектах освоения продукции на промышленных предприятиях проявляется эффект кривой обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Эффект кривой обучения был впервые открыт инженером Т. Райтом [1]. Наиболее полное описание кривых обучения в производственной деятельности представлено в научной литературе [2-4].

Динамическое изменение удельных затрат при увеличении кумулятивного объёма производства делает актуальными задачи динамической оптимизации. Задачи заключаются в поиске оптимальных объёмов производства в каждый момент времени при заданных временных, производственных и финансовых ограничениях с целью достижения экстремума выбранного экономического критерия. Постановки и численные решения динамических дискретных оптимизационных задач обучения работников в процессе работы приводятся в работе [5]. В статьях [6,7] сформулированы и численно решены задачи выбора объемов производства на промышленном предприятии в дискретном времени. Для получения численного решения применялся метод динамического программирования Беллмана. С целью поиска аналитических решений актуальным является рассмотрение динамических задач с непрерывным временем.

2. Динамические модели планирования производственной деятельности

2.1. Постановка дискретной задачи минимизации дисконтированных кумулятивных затрат предприятия

Динамика производственной деятельности промышленного предприятия описывается дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где x_t – кумулятивный объём производства за *t-ый* временной период, t – номер временного периода, u_t – объём производства в периоде t, n – число рассматриваемых периодов производственной деятельности предприятия (горизонт планирования). Выбор объёма производства u_t в периоде t является управлением руководства предприятия.

В начальный период известно количество продукции уже произведенное предприятием:

$$x_0 = X_0. \qquad (2)$$

Произведенное количество продукции x_0 характеризует накопленный опыт предприятия по освоению новой продукции до начала реализации проекта.

В конечный период кумулятивный объём произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x_n = X_0 + R, \qquad (3)$$

где R – заданное количество продукции.

На объём производства в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

$$Q^{\min} \le u_t \le Q^{\max}, \quad t = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

где $Q^{\min}$ – минимальный объём производства с учётом технологических и логистических требований, $Q^{\max}$ – максимальная производственная мощность оборудования промышленного предприятия.

Затраты предприятия в периоде t определяются как произведение удельных затрат продукции c_t и объёма производства продукции в этом периоде u_t:

$$C_t = c_t u_t \qquad (5)$$

Динамика изменения удельных затрат продукции от кумулятивного объёма производства описывается степенной зависимостью [1]:

$$c_t = a x_{t-1}^{-b} \qquad (6)$$

где a – затраты на производство первого изделия, b – скорость обучения.

Кривая, построенная на основе формулы (6) называется кривой обучения. Скорость обучения характеризует темп снижения удельных затрат промышленного предприятия при увеличении кумулятивного объёма производства.

Подставляя выражение (6) в формулу (5), получаем затраты промышленного предприятия на шаге t:

$$C_t = a x_{t-1}^{-b} u_t.$$

Критерием принятия управленческого решения является минимизация дисконтированных кумулятивных затрат промышленного предприятия:

$$J = \sum_{t=1}^{n} \frac{a x_{t-1}^{-b} u_t}{(1+r)^t} \to \min, \qquad (7)$$

где r – ставка дисконтирования, принятая руководством предприятия.

Под кумулятивными затратами промышленного предприятия понимается сумма затрат нарастающим итогом с начала производства продукции.

Задача заключается в поиске оптимальных объёмов производства $u_t^{opt}, \ t = \overline{1,n}$ удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют дисконтированные кумулятивные затраты предприятия (7).

Численное решение дискретной задачи получено с помощью метода динамического программирования Беллмана [6].

Однако постановка задачи в дискретном варианте не позволяет получить аналитическое решение. Для поиска аналитического решения в работе осуществлен переход от дискретной задачи к задаче с непрерывным временем.

2.2. Постановка задачи минимизации дисконтированных кумулятивных затрат предприятия с непрерывным временем

Аналогом уравнения (1) в непрерывном варианте является обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \tag{8}$$

где *x(t)* – кумулятивный объём производства в момент времени *t*, *u(t)* – объём производства. Проект освоения новой продукции на промышленном предприятии рассматривается на фиксированном интервале времени:

$0 \le t \le T,$

T – горизонт планирования проекта.

В начальный период времени известно количество продукции, уже произведенное предприятием к этому моменту:

$$x(0) = x_0 \tag{9}$$

В конечный момент времени кумулятивный объём произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x(T) = x_0 + R. \tag{10}$$

где R – заданное количество продукции.

На объём производства наложены следующие ограничения:

$$Q^{\min} \le u(t) \le Q^{\max}, \tag{11}$$

где Q^{min} – минимальный объём производства с учётом технологических и логистических требований, Q^{max} – максимальная производственная мощность оборудования промышленного предприятия.

Затраты на производство продукции определяются как произведение удельных затрат *c(t)* и объёма производства *u(t)*:

$$C(t) = c(t)u(t). \tag{12}$$

Динамика изменения удельных затрат от кумулятивного объёма производства описывается степенной зависимостью [1]:

$$c(t) = ax(t)^{-b}. \tag{13}$$

где a – затраты на производство первого изделия, b – скорость обучения.

Подставляя выражение (13) в формулу (12), получаем затраты для непрерывного варианта:

$$C(t) = ax(t)^{-b}u(t). \tag{14}$$

Аналогом критерия [7] для непрерывного варианта является:

$$J = \int_0^T \left(ax(t)^{-b}u(t)\right)e^{-\delta t}\,dt \to \min. \tag{15}$$

где δ – ставка дисконтирования для задачи с непрерывным временем.

Задача заключается в поиске оптимальных объёмов производства $u(t)^{opt}$ удовлетворяющих ограничению (11), которые осуществляют перевод производственного процесса (8) из начального состояния (9) в конечное состояние (10) и минимизируют дисконтированные кумулятивные затраты предприятия (15).

2.3. Аналитическое решение задачи минимизации дисконтированных кумулятивных затрат предприятия с непрерывным времени

Для решения сформулированной задачи оптимального управления с непрерывным временем применим принцип максимума Понтрягина [8]. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина к сформулированной задаче оптимального управления (8)-(11), (15) невозможно, так как в этом случае существует особое управление [9]. Сформулируем эквивалентную задачу для которой не существует особого управления. Минимизация дисконтированных кумулятивных затрат предприятия (15) будет эквивалента минимизации натурального логарифма дисконтированных кумулятивных затрат:

$$J = \int_0^T \ln\left(ax(t)^{-b} u(t)\right) e^{-\delta t} dt \to \min. \tag{16}$$

Функция натурального логарифма является монотонной функцией, кумулятивный объем производства *x(t)* и объем производства *u(t)* в момент времени *t* являются положительными числами.

Для решения эквивалентной задачи (8)-(11), (16) запишем функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(t)u(t) + \ln a + e^{-\delta t} b \ln x(t) - e^{-\delta t} \ln u(t), \tag{17}$$

где $\psi(t)$ - вспомогательная переменная, которая удовлетворяет сопряжённому уравнению:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{b}{x} e^{-\delta t}.$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Найдем максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{18}$$

Найдем оптимальное управление из условия (18):

$$u(t)^{opt} = \frac{e^{-\delta t}}{\psi}. \tag{19}$$

Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{-\delta t}}{\psi} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{b}{x} e^{-\delta t} \end{cases} \tag{20}$$

Из уравнений системы (20) следует:

$$dt = e^{\delta t} \psi dx. \tag{21}$$

$$dt = -e^{\delta t} \frac{x}{b} d\psi. \tag{22}$$

Симметрическая форма системы будет иметь:

$$dt = e^{\delta t} \psi dx = -e^{\delta t} \frac{x}{b} d\psi. \tag{23}$$

Разделим уравнение (23) на $x\psi$:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{b} \frac{d\psi}{\psi}. \tag{24}$$

Уравнение (24) является интегрируемым. Найдем его общее решение:

$$\psi = C_1 x^{-b}. \tag{25}$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Подставим полученное решение (25) в уравнение (21):

$$dt = e^{\delta t} C_1 x^{-b} dx. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (26) будет иметь вид:

$$t = -\frac{1}{\delta} \ln\left[C_2 - C_1 \delta \frac{x^{1-b}}{1-b} \right] \tag{27}$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (9) и (10):

$$C_1 = \frac{(1-e^{-\delta T})(1-b)}{\delta[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]}; \tag{28}$$

$$C_2 = 1 + \frac{(1-e^{-\delta T})x_0^{1-b}}{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}. \tag{29}$$

Подставляя постоянные интегрирования (28), (29) в уравнение (27) найдем уравнение оптимальной траектории кумулятивного объема производства:

$$x(t)^{opt} = \sqrt[1-b]{x_0^{1-b} + \frac{(1-e^{-\delta t})}{(1-e^{-\delta T})}[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]}. \tag{30}$$

Определим оптимальное управление, подставив (25) в (19) с учетом найденного выражения для C_1 (28):

$$u(t)^{opt} = \sqrt[\frac{b}{1-b}]{x_0^{1-b} + \frac{(1-e^{-\delta t})}{(1-e^{-\delta T})}[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]}\, \frac{\delta e^{-\delta t}}{1-e^{-\delta T}} \frac{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}{(1-b)}. \tag{31}$$

Найдем затраты предприятия (14) с учетом (30) и (31) в каждый момент времени на оптимальной траектории при оптимальном управлении:

$$C(t, x^{opt}, u^{opt}) = a \frac{\delta e^{-\delta t}}{1-e^{-\delta T}} \frac{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}{(1-b)}. \tag{32}$$

Анализируя (32) приходим к выводу, что при оптимальном управлении на оптимальной траектории изменение затрат предприятия зависит только от коэффициента дисконтирования $e^{-\delta t}$.

3. Заключение

В работе рассмотрены динамические модели планирования объёмов производства в проектах освоения новой продукции на промышленном предприятии в дискретном и непрерывном виде.

Осуществлен переход от дискретной модели планирования объёмов производства с учетом дисконтирования к непрерывной. В результате решения динамической задачи минимизации дисконтированных кумулятивных затрат получены аналитические формулы оптимальных объемов производства в каждый момент времени и оптимальная траектория кумулятивного объёма производства. Найдено аналитическое выражение для затрат в каждый момент времени на оптимальной траектории при оптимальном управлении. При оптимальном управлении на всей траектории изменение затрат предприятия определяется только коэффициентом дисконтирования.

4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606.

5. Литература

[1] Wright, T.P. Factors affecting the cost of airplanes / T.P. Wright // Journal of the aeronautical sciences. – 1936. – Vol. 3(4). – P. 122-128.

[2] Yelle, L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey / L.E. Yelle // Decision Sciences. – 1979. – Vol. 10(2). – P. 302-328.

[3] Badiru, A. Computational survey of univariate and multivariate learning curvemodels / A. Badiru // IEEE Transactions on Engineering Management. – 1992. – Vol. 39(2). – P. 176-188.
[4] Jaber, M.Y. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / M.Y. Jaber. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 476 p.
[5] Новиков, Д.А. Модели обучения в процессе работы / Д.А. Новиков // Управление большими системами. – 2007. – № 19. – С. 5-22.
[6] Павлов, О.В. Динамические задачи планирования в управлении проектами / О.В. Павлов // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012. – С. 1055-1058.
[7] Павлов, О.В. Динамическая оптимизация производственной деятельности предприятия с учетом эффекта кривой обучения / О.В. Павлов // Вестник Самарского государственного экономического университета. – 2015. – Т. 3, № 125. – С. 88-92.
[8] Понтрягин, Л.С. / Математическая теория оптимальных процессов // Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
[9] Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: учеб. для вузов / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

Dynamic models of production activity planning in projects for the development of new products

O.V. Pavlov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Dynamic models of production volume planning in the projects of development of new products at the industrial enterprise are considered. In the process of developing new products, the learning effect manifests itself, which leads to a reduction in labor intensity, depending on the cumulative volume of production. The dynamic planning problem of the production is formalized mathematically as a task of optimal control of the production system. Two variants of managing the organizational and technical system are considered: in discrete and continuous time. The dynamics of the system change is described by discrete and ordinary differential equations. For the continuous problem, an analytic solution is obtained using the Pontryagin maximum principle.

Keywords: learning, effect, dynamic, planning, problem.