Динамическая игровая задача стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства в непрерывном времени

О.В. Павлов[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе рассматривается задача стимулирования исполнителей проекта по освоению новой продукции на промышленном предприятии в непрерывном времени. В процессе освоения новой продукции проявляется эффект кривой обучения, который приводит к уменьшению трудоемкости продукции в зависимости от кумулятивного объема производства. Проект освоения новой продукции рассматривается как управляемая иерархическая динамическая система, состоящая из руководства проекта (центра) и исполнителей (агентов). Взаимодействие участников проекта формализуется как иерархическая дифференциальная игра. Для решения сформулированной динамической задачи материального стимулирования применялся известный принцип компенсации затрат. Исходная задача разделяется на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования. В исследовании показано, что задача согласованного динамического планирования состоит в определении центром оптимальных плановых объемов производства с целью минимизации трудовых затрат агентов. Исходная динамическая задача материального стимулирования была сведена к задаче оптимального управления. Задача оптимального управления с непрерывным временем была решена аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина. В результате проведенного исследования найдено условие определения оптимальных объемов производства, согласующих интересы центра и агентов.

1. Введение

В работе рассматриваются задача стимулирования исполнителей проекта по освоению новой продукции на промышленном предприятии. В процессе освоения новой продукции проявляется эффект обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих (трудоемкость продукции) на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижается. Проект освоения новой продукции рассматривается как управляемая иерархическая динамическая система, состоящая из руководства проекта (центра) и исполнителей (агентов). Динамика управляемой динамической производственной системы зависит только от действий агента, а центр выбором функции материального стимулирования оказывает воздействие на целевую функцию агента. Состояние иерархической динамической системы в каждый период времени зависит от её состояния и действий участников в предыдущий период. Производственная деятельность в проекте по освоению нового производства характеризуется несовпадающими интересами центра и агентов, что приводит к снижению экономической

эффективности. Разрешить эти противоречия возможно с помощью согласованных механизмов управления, которые побуждают агентов к выбору действий выгодных центру.
Динамические модели взаимодействия неравноправных игроков рассматриваются в теории активных систем [1] и информационной теории иерархических систем [2-4]. Прикладные модели иерархических динамических игр в области экономики и менеджмента приводятся в работах [5-7].
В теории активных систем [1] развивается подход, основанный на принципе компенсации затрат. Центр компенсирует затраты агента в случае выбора оптимальной плановой траектории центра и не выплачивает материального вознаграждения в противном случае. Исходная задача разделяется на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования. Задача согласованного планирования сводится к задаче оптимального управления.
В теории иерархических систем [2-4] предлагается подход, связанный с выбором центром программы совместных действий с агентом и наказание за отклонение от этой программы. В результате исходная задача сводится к оптимизационной задаче.
В теории дифференциальных игр [7] план центра реализуется с помощью триггерных стратегий. Основная идея заключается в том, что агенты, соглашаются следовать определенной траектории и наказывают любого отклонившегося агента.

1.1. Общая постановка и алгоритм решения задачи стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства

В рассматриваемой динамической игровой модели присутствуют динамика принятия решений и динамика управляемой системы. Неравноправие участников фиксируется порядком ходов, первый ход делает центр. Предполагается, что агенты не связаны друг с другом и выполняют действия независимо.
Задача стимулирования формализуется как динамическая игра Гермейера типа Γ_{2x} в позиционных стратегиях двух лиц с обратной связью по управлению:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t}\{ pu(t) - \sigma(x(t)\}dt \to max,$$

$$J_a = \int_0^T e^{-\rho t}\{ \sigma(x(t)) - C(x(t),u(t))\}dt \to max,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),$$

$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t),\ t = \overline{0,T},$$

$$x(0) = x_0,$$

$$x(T) = x_0 + R.$$

где J_p - критерий принятия решений центром, J_a - критерий принятия решений агентом, δ - коэффициент дисконтирования центра, *u(t)* - объём производства агентом в момент времени *t*, *p* - цена продукции, $\sigma(x(t))$ - функция стимулирования центра, *x(t)* - кумулятивный объём производства, *T* - горизонт планирования проекта, ρ - коэффициент дисконтирования агента, $C(x(t),u(t))$ - функция трудовых затрат агента на производство продукции (затрат в момент времени *t*), x_0 - объем продукции, произведенный агентом до начала проекта, *R* - объем продукции, который нужно произвести к моменту времени *T*.
Функция трудовых затрат агента на производство продукции (затрат в момент времени *t*) в денежном выражении определяется как произведение трудоемкости $c(x(t))$, объёма производства *u(t)* и стоимости одного норма часа *s*:

$$C(x(t),u(t)) = sc(x(t))u(t). \tag{1}$$

Динамика изменения трудоемкости продукции от кумулятивного объёма производства описывается различными моделями кривой обучения. Наиболее типичными моделями

являются степенная, экспоненциальная и логистическая, описанные в научной литературе [8]-[11].
Степенная модель кривой обучения имеет следующий вид:
$$c(x(t)) = ax(t)^{-b}. \qquad (2)$$
где a – затраты на производство первого изделия, b – индекс обучения.
Индекс обучения характеризует скорость снижения трудоемкости продукции при увеличении кумулятивного объёма производства.
Экспоненциальная модель кривой обучения:
$$c(x(t)) = k + \beta e^{-\alpha x(t)}.$$
где α - индекс обучения, k, β - параметры экспоненциальной модели.
Логистическая модель кривой обучения:
$$c(x(t)) = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min})\left[\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}\right],$$
где $c_{\min}$, $c_{\max}$ - минимальные и максимальные значения трудоемкости продукции, α - индекс обучения, β - параметр логистической модели.
Для решения сформулированной задачи стимулирования применяется принцип компенсации затрат [1].
В соответствии с принципом компенсации затрат для того, что бы побудить агента выбрать плановую траекторию центру достаточно компенсировать его затраты:
$$\sigma(x(t)) = C(x(t), u(t)). \qquad (3)$$
С учетом (3) и (1) целевая функция центра запишется:
$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t}\{[p - sc(x(t))]u(t)\}dt \to max.$$
Учитывая, что цена детали p постоянная величина, максимизацию интегрального дохода центра можно заменить минимизацией интегральных трудовых затрат агента:
$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), u(t))dt \to min.$$
Алгоритм решения состоит в разделении исходной задачи на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования.
1.Задача согласованного динамического стимулирования.
Центр выбирает компенсаторную систему стимулирования, которая заключается в компенсации затрат агента в случае выбора оптимальной плановой траектории центра $x^R(t)$ и отсутствия материальных выплат в противном случае:
$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} C(x(t), u(t)), & если\ x(t) = x^R(t),\ для\ \forall t \in [0, T] \\ 0, & если\ x(t) \neq x^R(t),\ для\ \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$
2. Задача согласованного динамического планирования.
Оптимальная плановая траектория центра $x^R(t)$ определяется из решения задачи оптимального управления:
$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), u(t))dt \to min. \qquad (4)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \qquad (5)$$
$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t),\ t = 0, T, \qquad (6)$$
$$x(0) = x_0, \qquad (7)$$
$$x(T) = x_0 + R. \qquad (8)$$

Задача центра заключается в выборе оптимальных объёмов производства деталей $u(t)^{opt}$ удовлетворяющие ограничению (6), которые осуществляют перевод производственного процесса (5) из начального состояния (7) в конечное состояние (8) и минимизируют интегрированные дисконтированные трудовые затраты агента (4).

1.2. Решение задачи согласованного динамического планирования

Для решения сформулированной задачи оптимального управления с непрерывным временем (4)-(8) применим принцип максимума Понтрягина [12]. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина к сформулированной задаче оптимального управления невозможно, так как в этом случае существует особое управление [13].

В качестве критерия оптимальности центра рассмотрим близкий по экономическому смыслу критерий минимизации интегрального дисконтированного темпа функции трудовых затрат агента *C(t)*:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \mathrm{d}t \to \min.$$

где $\dfrac{\dot{C}(t)}{C(t)} = [\ln C(t)]'$ - логарифмическая производная функции трудовых затрат, имеющая экономический смысл темпа функции трудовых затрат.

Утверждение

Для положительной и абсолютно непрерывной функции *C(t)* максимизация (минимизация) функционала:

$$\tilde{J} = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \mathrm{d}t \tag{9}$$

эквивалентна максимизации (минимизации) функционала:

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} \ln C(t) \mathrm{d}t. \tag{10}$$

Доказательство утверждения приводится в Приложении.

С учетом утверждения в качестве критерия оптимальности центра примем минимизацию интегральной дисконтированной логарифмической функции затрат агента (10). Подставим выражение для функции трудовых затрат (1) в функционал (10):

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t} \, ln[\, sc(\, x(t\,))u(t\,)] \mathrm{d}t. \tag{11}$$

Для решения сформулированной задачи оптимального управления с непрерывным временем (5)-(8), (11) применим принцип максимума Понтрягина [12]. Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(t)u(t) - e^{-\delta t}s - e^{-\delta t} ln[\, c(\, x(t\,))] - e^{-\delta t} ln[\, u(t\,)],$$

где $\psi(t)$ - вспомогательная переменная, которая удовлетворяет сопряжённому уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\delta t} \frac{\partial\{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x}.$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Найдем максимум гамильтониана по управлению из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{12}$$

Определим оптимальное управление из условия (12):

$$u(t)^{opt} = \frac{e^{-\delta t}}{\psi}. \tag{13}$$

Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e^{-\delta t}}{\psi} \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = e^{-\delta t}\,\dfrac{\partial\{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x} \end{cases} \tag{14}$$

Из уравнений системы (14) следует:

$$\mathrm{d}t = e^{\delta t}\psi dx. \tag{15}$$

$$\mathrm{d}t = e^{\delta t}\left(\frac{\partial\{ln[\,c(\,x(\,t\,))]\}}{\partial x}\right)^{-1}\mathrm{d}\psi. \tag{16}$$

Симметрическая форма системы (14) с учетом уравнений (15), (16) будет иметь вид:

$$\mathrm{d}t = \psi dx = \left(\frac{\partial\{ln[\,c(\,x(\,t\,))]\}}{\partial x}\right)^{-1}\mathrm{d}\psi. \tag{17}$$

Выполним разделение переменных во втором дифференциальном уравнении (17):

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} = \frac{\partial\{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x}\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения (18):

$$\psi = C_0 c(x(t)). \tag{19}$$

где C_0 - постоянная интегрирования.

Оптимальное управление (13) с учетом (19) примет вид:

$$u(\,t\,)^{opt} = \frac{e^{-\delta t}}{C_0 c(\,x(\,t\,))}. \tag{20}$$

Из полученного условия для оптимального управления (20) следует: оптимальные объемы производства должны быть обратно пропорциональны удельным затратам на производство и прямо пропорциональны коэффициенту дисконтирования.

Найдем оптимальное управление и оптимальную траекторию для степенной модели кривой обучения (2). Подставим формулу (2) в полученное выражение для сопряженной переменой (19):

$$\psi = C_1 x(\,t\,)^{-b}. \tag{21}$$

где $C_1 = C_0 a$ - постоянная интегрирования.

Подставим формулу (21) в дифференциальное уравнение (15):

$$\mathrm{d}t = e^{\delta t} C_1 x^{-b} dx. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (22) будет иметь вид:

$$t = -\frac{1}{\delta}\ln\left[C_2 - C_1\delta\frac{x^{1-b}}{1-b}\right] \tag{23}$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (7) и (8):

$$C_1 = \frac{(1-e^{-\delta T})(1-b)}{\delta[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]}; \tag{24}$$

$$C_2 = 1 + \frac{(1-e^{-\delta T})x_0^{1-b}}{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}. \tag{25}$$

Подставляя постоянные интегрирования (24), (25) в формулу (23) найдем уравнение оптимальной траектории кумулятивного объема производства:

$$x(t)^{opt} = \left(x_0^{1-b} + \frac{(1-e^{-\delta t})}{(1-e^{-\delta T})}[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]\right)^{\frac{1}{1-b}}. \tag{26}$$

Определим оптимальное управление, подставив формулу (21) в условие (13) с учетом найденного выражения для C_1 (24):

$$u(t)^{opt} = \frac{\delta e^{-\delta t}}{1-e^{-\delta T}}\left(x_0^{1-b} + \frac{(1-e^{-\delta t})}{(1-e^{-\delta T})}[(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}]\right)^{\frac{b}{1-b}} \frac{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}{(1-b)}. \qquad (27)$$

Найдем функцию трудовых затрат (1) с учетом формул (26) и (27) на оптимальной траектории при оптимальном управлении:

$$C(t, x^{opt}, u^{opt}) = a\frac{\delta e^{-\delta t}}{1-e^{-\delta T}} \frac{(x_0+R)^{1-b} - x_0^{1-b}}{(1-b)}. \qquad (28)$$

Анализируя (28) приходим к выводу, что при оптимальном управлении изменение функции трудовых затрат зависит только от коэффициента дисконтирования $e^{-\delta t}$.

2. Заключение

В работе рассмотрены динамические задачи стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства в непрерывном виде.

Для решения сформулированной задачи стимулирования применен принцип компенсации затрат. В качестве системы стимулирования рассмотрена компенсаторная система, которая заключается в компенсации затрат агента в случае выбора оптимальной плановой траектории центра и отсутствия материальных выплат в противном случае. Исходная задача декомпозирована на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования.

В результате решения задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина найдено условие оптимальной производственной программы, обеспечивающей минимизацию затрат агентов для любой модели кривой обучения. Оптимальные объемы производства должны быть обратно пропорциональны удельным затратам на производство и прямо пропорциональны коэффициенту дисконтирования.

Для степенной модели кривой обучения получены аналитические формулы оптимальных объемов производства в каждый момент времени и оптимальная траектория кумулятивного объёма производства. Найдено аналитическое выражение для функции трудовых затрат на оптимальной траектории при оптимальном управлении.

3. Приложение

Доказательство утверждения.

Выполним интегрирование функционала (9) по частям:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = e^{-\delta T}\ln C(T) - \ln C(0) + \delta\int_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)\mathrm{d}t. \qquad (29)$$

Введем функцию $g(t)$:

$$g(t) = e^{-\delta t}\ln C(t).$$

Тогда значение функции в начальный и конечный момент времени: $g(0) = \ln C(0)$, $g(T) = e^{-\delta T}\ln C(T)$. Выражение (29) примет вид:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = g(T) - g(0) + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t. \qquad (30)$$

Случай А. Возрастающая функция $g(t)$.

Геометрической интерпретацией интеграла $S_g = \int_0^T g(t)\mathrm{d}t$ является площадь криволинейной трапеции, ограниченная сверху положительной функцией $g(t)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t=0$ и $t=T$. Площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(T)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$ может быть определена с одной стороны через интеграл, а с другой как произведение длины на высоту:

$$S_T = \int_0^T g(T)\mathrm{d}t = Tg(T). \tag{31}$$

Аналогично, площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(0)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$ может быть найдена:

$$S_0 = \int_0^T g(0)\mathrm{d}t = Tg(0). \tag{32}$$

Из формул (31) и (32) следует:

$$g(T) = \frac{1}{T}\int_0^T g(T)\mathrm{d}t. \tag{33}$$

$$g(0) = \frac{1}{T}\int_0^T g(0)\mathrm{d}t. \tag{34}$$

Тогда функционал (30) с учетом формул (33) и (34) может быть записан:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = g(T) - g(0) + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]\mathrm{d}t + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t. \tag{35}$$

Интеграл $\int_0^T [g(T) - g(0)]\mathrm{d}t = S_{T0}$ определяет площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(T)$, снизу прямой $g(t) = g(0)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$.

Формулу $\delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$ геометрически можно интерпретировать как площадь сжатой по высоте криволинейной трапеции δS_g, так как $\delta < 1$. В случае возрастающей функция $g(t)$ выполняется условие $g(T) > g(0)$. Выражение $\frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]\mathrm{d}t = \frac{1}{T}S_{T0}$ является положительной величиной и вычисляет площадь сжатого по высоте прямоугольника S_{T0}.

Сумма площадей трансформированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{T0}$ может быть определена как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху положительной функцией $\lambda_1 g(t)$ (λ_1-постоянный множитель), снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]\mathrm{d}t + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \lambda_1 g(t)\mathrm{d}t.$$

Так как λ_1 постоянный множитель, то максимизация (минимизация) функционала $\int_0^T \lambda_1 g(t)\mathrm{d}t$ будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)\mathrm{d}t$. Таким образом, утверждение доказано.

Случай Б. Убывающая функция $g(t)$.

В случае убывающей функции $g(t)$ выполняется условие $g(T) < g(0)$. Формула (35) примет вид:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{T}\int_0^T [g(0) - g(T)]\mathrm{d}t + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t.$$

Интеграл $\int_0^T [g(0) - g(T)]\mathrm{d}t = S_{0T}$ определяет площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(0)$, снизу прямой $g(t) = g(T)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$. Выражение $\frac{1}{T}\int_0^T [g(0) - g(T)]\mathrm{d}t = \frac{1}{T}S_{0T}$ является положительной величиной и вычисляет площадь сжатого по высоте прямоугольника S_{0T}.

1 вариант: выполняются условия $\delta > \frac{1}{T}$, $\delta g(T) > \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансформированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху положительной функцией $\lambda_2 g(t)$ (λ_2-постоянный множитель), снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{T}\int_0^T [g(0) - g(T)]\mathrm{d}t + \delta\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \lambda_2 g(t)\mathrm{d}t.$$

Максимизация (минимизация) функционала $\int_0^T \lambda_2 g(t)\mathrm{d}t$ будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)\mathrm{d}t$. Утверждение доказано.

2 вариант: выполняются условия $\delta < \frac{1}{T}$, $\delta g(T) < \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансфомированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как площадь перевернутой криволинейной трапеции, ограниченной сверху прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$, снизу функцией $\delta g(t)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$. Отрицательная разница площадей может быть вычислена $-\int_0^T [\frac{1}{T}g(0) - \delta g(t)]\mathrm{d}t = \int_0^T \delta g(t)\mathrm{d}t - g(0)$. Так как $\delta, g(0) = const$, то максимизация (минимизация) этого выражения будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)\mathrm{d}t$. Утверждение доказано.

3 вариант: выполняются условия $\delta > \frac{1}{T}$, $\delta g(T) < \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансфомированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как разница площадей двух криволинейных треугольников. Площадь первого криволинейного треугольника ограниченна сверху функцией $\delta g(t)$, снизу прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$ и прямыми $t = 0$ и $t = \tau$ (абсцисса точки пересечения функции $\delta g(t)$ и прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$). Площадь второго криволинейного треугольника ограниченна сверху прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$, снизу функцией $\delta g(t)$ и прямыми $t = \tau$ и $t = T$.

Разница площадей может быть вычислена: $\int_0^{\tau}[\delta g(t) - \frac{1}{T}g(0)]\mathrm{d}t - \int_{\tau}^{T}[\frac{1}{T}g(0) - \delta g(t)]\mathrm{d}t = \int_0^{T}\delta g(t)\mathrm{d}t - g(0)$. Так как $\delta, g(0) = const$, то максимизация (минимизация) этого выражения будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^{T} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T} e^{-\delta t}\ln C(t)\mathrm{d}t$. Утверждение доказано.

4. Литература

[1] Новиков, Д.А. Механизмы управления динамическими активными системами / Д.А. Новиков, И.М. Смирнов, Т.Е. Шохина. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

[2] Горелик, В.А. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления / В.А. Горелик, М.А. Горелов, А.Ф. Кононенко. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.

[3] Горелик, В.А. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах / В.А. Горелик, А.Ф. Кононенко. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.

[4] Горелов, М.А. Динамические игры. III. Иерархические игры / М.А. Горелов, А.Ф. Кононенко // Автоматика и телемеханика. – 2015. – Т. 2. – С. 89-106.

[5] Угольницкий, Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем / Г.А. Угольницкий. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 940 с.

[6] Basar, T. Dynamic Noncooperative Game Theory / T. Basar, G.J. Olsder. – Philadelphia: SIAM, 1999. – 519 p.

[7] Dockner, E. Differential games in economics and management Science / E. Dockner, S. Jorgensen, N.V. Long, G. Sorger. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 382 c.

[8] Wright, T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. – 1936. – Vol. 3(4). – P. 122-128.

[9] Yelle, L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. – 1979. – Vol. 10(2). – P. 302-328.

[10] Badiru, A. Computational survey of univariate and multivariate learning curvemodels / A. Badiru // IEEE Transactions on Engineering Management. – 1992. – Vol. 39(2). – P. 176-188.

[11] Jaber, M.Y. Learning Curves: Theory, Models, and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 476 p.

[12] Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

[13] Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606.

Dynamic game task of executors incentives in projects for the development of new production in continuous time

O.V. Pavlov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The incentive problem of executors of the new products development project at the industrial enterprise in continuous time is considered in this article. In the process of developing new products, the learning curve effect manifests itself, which leads to a reduction in labor intensity, depending on the cumulative volume of production. The project of the new products development is considered as a managed hierarchical dynamic system, consisting of a project management board (principal) and executors (agents). The interaction of project participants is formalized as a hierarchical differential game. To solve the formulated dynamic problem of material incentives, the well-known principle of cost compensation was applied. The original task is divided into the task of coordinated incentives and the task of coordinated planning. The study showed that the task of coordinated dynamic planning is for the center to determine the optimal planned production volumes in order to minimize the labor costs of agents. The initial dynamic problem of material incentives was reduced to the optimal control problem. The problem of optimal control with continuous time was solved analytically using the Pontryagin maximum principle. As a result of the study, a condition for the optimal production volumes determining matching the interests of the center and agents was found.