

Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений

А.В. Цыганов¹, Ю.В. Цыганова², А.И. Кувшинова¹

¹Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, площадь Ленина 4/5, Ульяновск, Россия, 432071

²Ульяновский государственный университет, Льва Толстого 42, Ульяновск, Россия, 432017

Аннотация. В статье рассматривается задача динамической идентификации граничных условий для одномерной модели конвективно-диффузионного переноса по данным зашумленных измерений искомой функции. С помощью метода конечных разностей осуществляется переход от исходной модели с уравнением в частных производных к дискретной линейной динамической системе с зашумленными мультисенсорными измерениями, в которую граничные условия входят в качестве неизвестного вектора входных воздействий. Для решения поставленной задачи применяется алгоритм одновременного оптимального оценивания векторов состояния и входных воздействий. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие практическую применимость предложенного подхода.

1. Введение и постановка задачи

В последние десятилетия в различных областях науки и техники наблюдается возросший интерес к обратным задачам для уравнений в частных производных, связанный с необходимостью разработки новых методов решения прикладных проблем, требующих обработки и интерпретации экспериментальных данных [1]. Среди различных типов обратных задач важную роль в приложениях играют граничные обратные задачи, связанные с определением поведения искомой функции на границе рассматриваемой области.

Одним из важных классов моделей, широко используемых при описании природных и техногенных процессов и явлений, являются модели конвективно-диффузионного переноса [2], [3]. В простейшем одномерном случае модель конвективно-диффузионного переноса может быть описана уравнением (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad a < x < b, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$c(x, 0) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

$$c(a, t) = f_1(t), c(b, t) = f_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

где $c(x, t)$ — искомая функция, x — пространственная координата, t — время, v — скорость

конвекции, α — коэффициент диффузии, $\varphi(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ — заданные функции, a , b — границы рассматриваемого отрезка.

Рассмотрим задачу динамического (в реальном времени) оценивания значений функции $c(x, t)$ в модели (1)–(3) на концах отрезка $[a, b]$ по результатам зашумленных измерений ее значений во внутренних точках отрезка в последовательные моменты времени. Подобные задачи возникают на практике, когда поведение объекта или процесса на границе не поддается непосредственному измерению или сопряжено с высокими затратами. В отличие от классических постановок нас интересуют не аналитические выражения для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, а оценки их численных значений в дискретные моменты времени.

2. Дискретная линейная динамическая модель

Для решения поставленной задачи перейдем от исходной модели (1)–(3) к дискретной линейной динамической системе в пространстве состояний с зашумленными измерениями, которая в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \\ z_k = H_k z_k + \xi_k, \\ k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий, $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, шумы $w_k \in \mathbb{R}^q$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ образуют независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $Q \geq 0$ и $R > 0$.

Рассмотрим в плоскости Oxt регулярную сетку с пространственным шагом Δx , временным шагом Δt и узлами (x_i, t_k) :

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots$$

Обозначим $c_k^i = c(x_i, t_k)$, $\varphi^i = \varphi(x_i)$, $f_k^1 = f_1(t_k)$, $f_k^2 = f_2(t_k)$ и запишем конечно-разностную схему для (1)–(3):

$$\frac{c_k^i - c_{k-1}^i}{\Delta t} + v \frac{c_{k-1}^{i+1} - c_{k-1}^{i-1}}{2\Delta x} = \alpha \frac{c_{k-1}^{i+1} - 2c_{k-1}^i + c_{k-1}^{i-1}}{\Delta x^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$c_0^i = \varphi^i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$c_k^0 = f_k^1, c_k^N = f_k^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Из уравнения (4) следует, что значение функции $c(x, t)$ в узловой точке k -го временного ряда определяется ее значениями в трех точках $(k-1)$ -го временного ряда:

$$c_k^i = (r_1 + r_2)c_{k-1}^{i-1} + (1 - 2r_2)c_{k-1}^i + (r_2 - r_1)c_{k-1}^{i+1}, \quad (7)$$

где $r_1 = \frac{v\Delta t}{2\Delta x}$, $r_2 = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$. Перепишем (7) в виде

$$c_k^i = a_1 c_{k-1}^{i-1} + a_2 c_{k-1}^i + a_3 c_{k-1}^{i+1},$$

где $a_1 = r_1 + r_2$, $a_2 = 1 - 2r_2$, $a_3 = r_2 - r_1$.

Искомая дискретная линейная система может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ c_k^3 \\ \vdots \\ c_k^{n-2} \\ c_k^{n-1} \\ c_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k-1}^1 \\ c_{k-1}^2 \\ c_{k-1}^3 \\ \vdots \\ c_{k-1}^{n-2} \\ c_{k-1}^{n-1} \\ c_{k-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{k-1}^1 \\ f_{k-1}^2 \\ \vdots \\ f_{k-1}^r \end{bmatrix}}_{u_{k-1}}, \\ & \begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^m \end{bmatrix} = H_k \begin{bmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ \vdots \\ c_k^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_k^1 \\ \xi_k^2 \\ \vdots \\ \xi_k^m \end{bmatrix}, \\ & k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

где $n = N - 1$ (вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки), $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица наблюдения, m — количество измеряемых компонент вектора состояния.

Модель (8) является детерминированной (шум w_k в объекте отсутствует) дискретной линейной динамической системой с зашумленными измерениями, в которой неизвестные граничные условия входят в двумерный вектор входных воздействий ($r = 2$). Матрица системы $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является трехдиагональной постоянной матрицей, матрица входных воздействий $B_k \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ также является постоянной.

Для идентификации неизвестных параметров полученной модели могут быть использованы различные подходы, основанные на методах оптимального оценивания. Например, в работе [4] для определения коэффициентов v и α уравнения (1) применялся комбинированный подход, основанный на сочетании метода наименьших квадратов и расширенного фильтра Калмана, однако вектор входных воздействий предполагался известным.

3. Алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий

В нашей задаче вектор входных воздействий в модели (8) является неизвестным. Один из первых подходов к его оценке в дискретных динамических системах заключался во включении неизвестных входных воздействий в вектор состояния, что предполагает наличие априорной информации о динамике входных воздействий.

В данной работе для оценки вектора входных воздействий будем использовать алгоритм одновременного оптимального оценивания векторов состояния и входных воздействий при отсутствии априорной информации о входных воздействиях, предложенный в работе [5]. Данная работа является развитием результатов, полученных в [6] и [7], но отличается тем, что в ней предложен рекуррентный фильтр с отдельной оценкой векторов состояния и входных воздействий.

Пусть для любого k выполняется условие

$$\text{rank } H_k B_{k-1} = \text{rank } B_{k-1} = r. \tag{9}$$

Обозначим через I_n, I_m, I_p единичные матрицы порядка n, m и p соответственно ($p = m - r$).

АЛГОРИТМ 1. (S. Gillijns, B. De Moor [5]).

Для $k = 1, 2, \dots$ выполнять

Начало

1) прогноз c_k и P_k без учета оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{c}_{k-1|k-1},$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1},$$

2) оценка вектора входных воздействий u_{k-1}

$$\tilde{R}_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k,$$

$$D_k = H_k B_{k-1},$$

$$M_k = (D_k^T \tilde{R}_k^{-1} D_k)^{-1} D_k^T \tilde{R}_k^{-1},$$

$$\hat{u}_{k-1} = M_k(z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1}), \tag{10}$$

3) прогноз c_k и P_k с учетом оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k}^* = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1} \hat{u}_{k-1},$$

$$P_{k|k}^* = (I_n - B_{k-1} M_k H_k) P_{k|k-1} (I_n - B_{k-1} M_k H_k)^T + B_{k-1} M_k R_k M_k^T B_{k-1}^T,$$

4) коррекция c_k и P_k

$$\tilde{R}_k^* = (I_m - H_k B_{k-1} M_k) \tilde{R}_k (I_m - H_k B_{k-1} M_k)^T,$$

$$S_k^* = -B_{k-1} M_k R_k,$$

$$\alpha_k = [0 \ I_p] U_k^T \tilde{S}_k^{-1}, \tag{11}$$

$$K_k = (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*) \alpha_k^T (\alpha_k \tilde{R}_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k,$$

$$\hat{c}_{k|k} = \hat{c}_{k|k}^* + K_k (z_k - H_k \hat{c}_{k|k}^*), \tag{12}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k}^* - K_k (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*)^T.$$

Конец

В формуле (11) матрица \tilde{S}_k такова, что $\tilde{S}_k \tilde{S}_k^T = \tilde{R}_k$, а U_k — ортогональная матрица, составленная из левых сингулярных векторов матрицы $\tilde{S}_k^{-1} H_k B_{k-1}$.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + 2 \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < +\infty, \tag{13}$$

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{14}$$

$$c(0, t) = 2 |\sin(10t)|, c(1, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{15}$$

где $c(x, t)$ — концентрация загрязняющего вещества в одномерном потоке, текущем слева направо. Условие (14) означает, что начальная концентрация вещества равна нулю на всем отрезке, первое граничное условие (15) соответствует периодическому повышению концентрации на левом конце рассматриваемого отрезка, а второе — поглощающей стенке на правом конце.

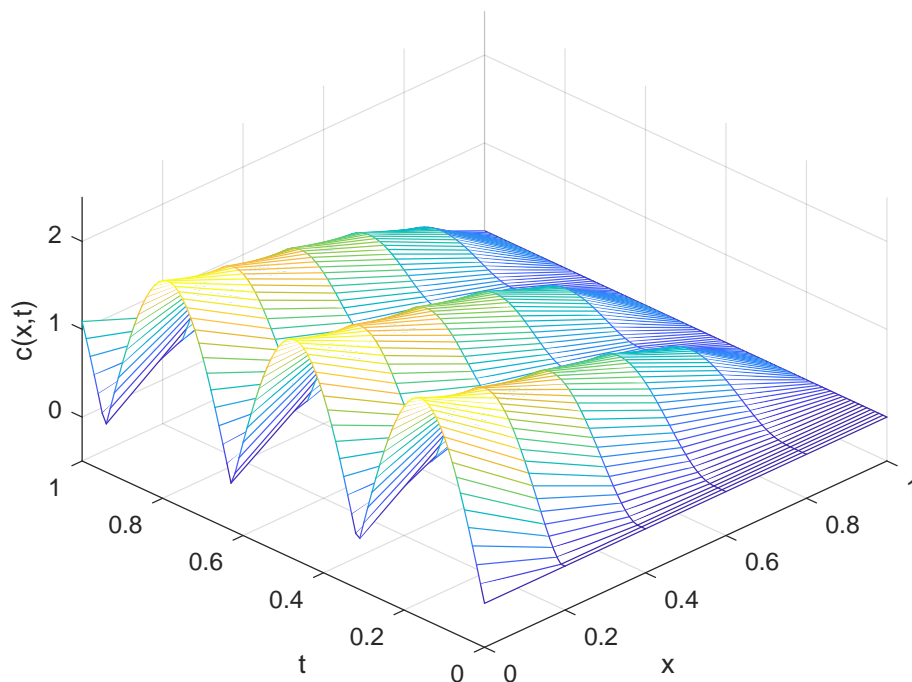


Рисунок 1. График решения.

Зададим пространственную сетку с шагом $\Delta x = 0.2$, состоящую из четырех внутренних ($x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8$) и двух граничных ($x_0 = 0, x_5 = 1$) узлов. Шаг Δt с учетом условия сходимости конечно-разностной схемы выберем равным $\frac{\Delta x^2}{4\alpha} = 0.01$.

На рисунке 1 приведен график решения задачи (13)–(15) методом конечных разностей для $t \in [0; 1]$ ($k = 1, 2, \dots, 100$).

Рассмотрим модель измерений с двумя сенсорами ($m = 2$) в первом и последнем внутренних узлах. Заметим, что при такой модели измерений условие (9) выполняется. Система (8) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ c_k^3 \\ c_k^4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{k-1}^1 \\ c_{k-1}^2 \\ c_{k-1}^3 \\ c_{k-1}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-1}^1 = c_{k-1}^0 \\ f_{k-1}^2 = c_{k-1}^5 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ c_k^3 \\ c_k^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_k^1 \\ \xi_k^2 \end{bmatrix}, \\ &k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \tag{16}$$

На рисунке 2 приведены графики зашумленных измерений в первом и последнем внутренних узлах, на рисунках 3 и 4 — результаты оценивания граничных значений функции $c(x, t)$, а на рисунке 5 — график оценки решения (во внутренних узлах и на границе), полученные алгоритмом 1 с ковариацией шума $R = \text{diag}\{0.03^2, 0.03^2\}$. Заметим, что для рассматриваемой нами модели на каждой итерации алгоритма по формуле (10) вычисляется оценка вектора входных воздействий для предыдущего момента времени, а по формуле (12) получается оценка вектора состояния для текущего момента времени. Таким образом, оценка граничных значений функции $c(x, t)$ (входных воздействий в

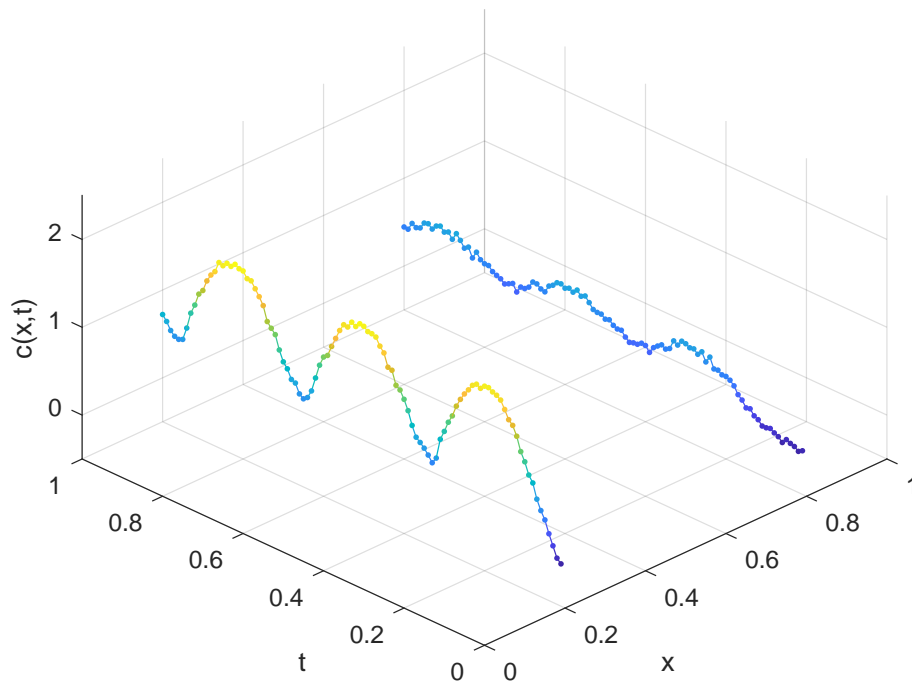


Рисунок 2. Зашумленные измерения ($x = 0.2$ и $x = 0.8$).

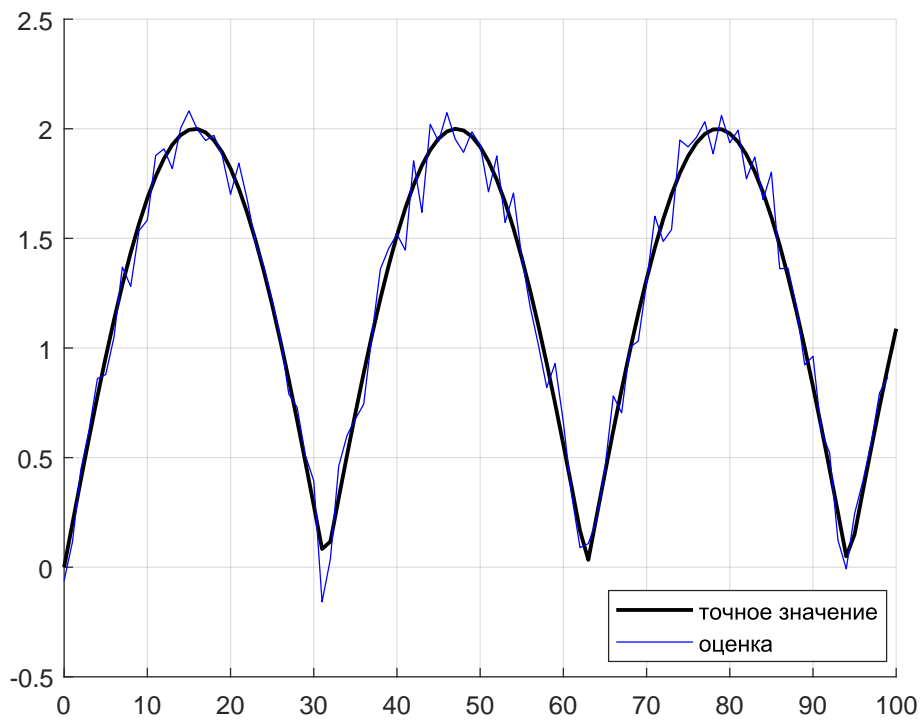


Рисунок 3. Левая граница ($x = 0$).

модели) производится с запаздыванием на один такт и на последней итерации алгоритма оказывается неопределенным.

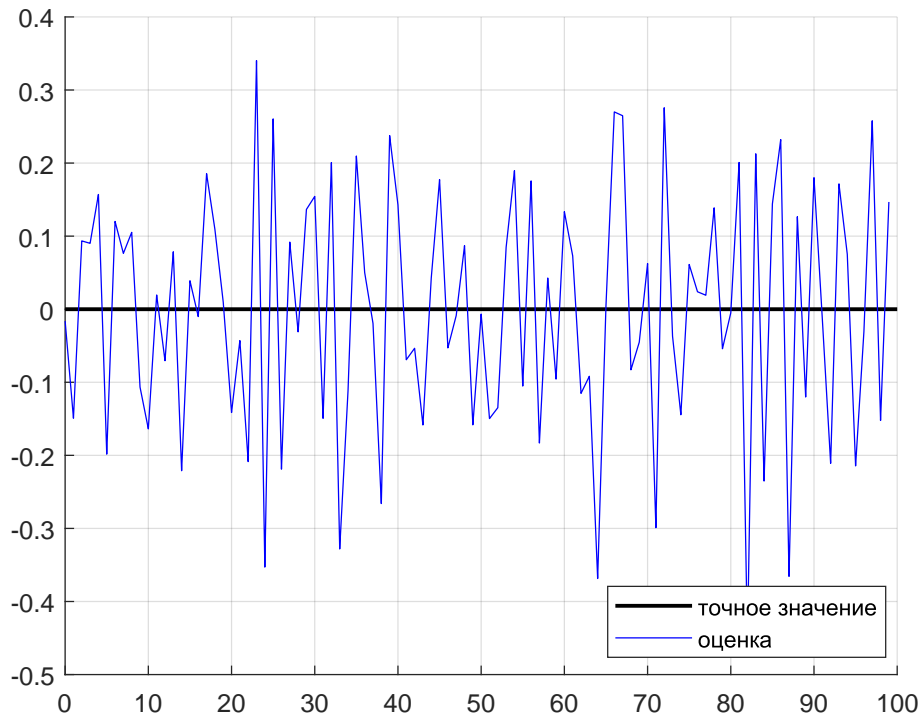


Рисунок 4. Правая граница ($x = 1$).

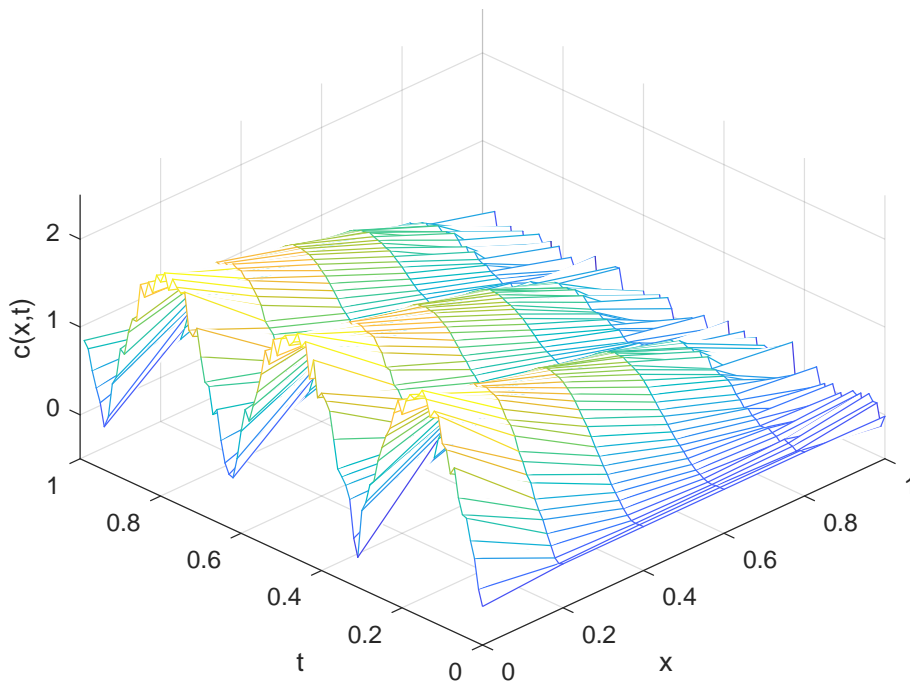


Рисунок 5. Оценка решения.

В таблице 1 приведены среднеквадратические ошибки оценивания (RMSE) значений функции $c(x, t)$ в граничных и внутренних узлах сетки и нормализованная среднеквад-

Таблица 1. Ошибки оценивания.

	RMSE _{left}	RMSE ₁	RMSE ₂	RMSE ₃	RMSE ₄	RMSE _{right}	nRMSE
R_1	1.0218	0.2837	0.1038	0.0856	0.3084	1.7058	2.0365
R_2	0.0936	0.0254	0.0085	0.0083	0.0291	0.1677	0.1962
R_3	0.0096	0.0027	0.0012	0.0009	0.0030	0.0169	0.0199

ратическая ошибка (nRMSE) при различных ковариациях шума ($R_1 = \text{diag}\{0.3^2, 0.3^2\}$, $R_2 = \text{diag}\{0.03^2, 0.03^2\}$, $R_3 = \text{diag}\{0.003^2, 0.003^2\}$).

5. Заключение

В работе предложен новый подход к динамической идентификации граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений, основанный на использовании методов дискретной фильтрации.

Новизна предлагаемого подхода заключается в переходе от исходной модели, описываемой уравнением в частных производных, к дискретной линейной динамической системе, в которой граничные условия представлены как неизвестные входные воздействия, для идентификации которых применяется алгоритм [5].

Дальнейшие исследования будут направлены на развитие предложенного подхода и разработку новых методов решения обратных задач для модели конвективно-диффузионного переноса по экспериментальным данным.

6. Литература

- [1] Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
- [2] Теория теплообмена: учеб. для машиностроит. спец. техн. ун-тов и вузов / под ред. А.И. Леонтьева. – М.: МГТУ, 1997. – 683 с.
- [3] Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
- [4] Матвеев, М.Г. Комбинированный метод идентификации параметров распределенной динамической модели / М.Г. Матвеев, А.В. Копытин, Е.А. Сирота // Сборник трудов IV международной конференции и молодежной школы “Информационные технологии и нанотехнологии”. – Самара: Новая техника, 2018. – С. 1651-1657.
- [5] Gillijns, S. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems / S. Gillijns, B. De Moor // Automatica. – 2007. – Vol. 43. – P. 111-116.
- [6] Kitanidis, P.K. Unbiased minimum-variance linear state estimation / P.K. Kitanidis // Automatica. – 1987. – Vol. 23(6). – P. 775-778.
- [7] Da1ouach, M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs / M. Da1ouach, M. Zasadzinski // Automatica. – 1997. – Vol. 33(4). – P. 717-719.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области в рамках научного проекта № 18-41-732001.

Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements

A.V. Tsyganov¹, Yu.V. Tsyganova², A.N. Kuvshinova¹

¹Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, Lenin square 4/5, Ulyanovsk, Russia, 432071

²Ulyanovsk State University, Leo Tolstoy street 42, Ulyanovsk, Russia, 432017

Abstract. The paper addresses the problem of dynamic identification of boundary conditions for one-dimensional convection-diffusion transport model based on noisy measurements of the function of interest. Using finite difference method the original model with the partial differential equation is replaced with the discrete linear dynamic system with noisy multisensor measurements in which boundary conditions are included as unknown input vector. To solve the problem, the algorithm of simultaneous estimation of the state and input vectors is used. The results of numerical experiments are presented which confirm the practical applicability of the proposed method.