

# Детектирование aberrаций волнового фронта с помощью дифракционного оптического элемента

П.А. Хорин

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

Для прямого оптического измерения амплитуд коэффициентов разложения волнового фронта по полиномам Цернике предполагается использование многопорядковых (многоканальных) дифракционных оптических элементов. Такой подход показал успешность в случае малых aberrаций, когда поле может быть приближенно представлено в виде линейной суперпозиции полиномов Цернике. Однако с ростом величины aberrаций линейная аппроксимация становится неприемлемой и происходит ложное детектирование. В данной работе выполнено исследование данной ситуации.

**Ключевые слова:** полиномы Цернике; анализ волнового фронта; многоканальный дифракционный оптический элемент

## 1. Введение

Восстановление фазы светового поля - одна из основных задач обработки сигналов [1]. Не имея возможности прямым способом измерять фазу светового поля нужно определять ее косвенно, через измерения интенсивности света. Например, волновой фронт светового поля может быть восстановлен по интерферограмме, по измерениям распределения интенсивности пространственного спектра. Датчик волнового фронта Гартмана-Шака, состоящий из массива одинаковых малых отверстий или матрицы микролинз, также служит для восстановления фазы [2]. Восстановить фазу также можно с использованием дифракционных оптических элементов (ДОЭ), раскладывающих световое поле по ортогональному базису [3-5].

Общепринятым представлением волнового фронта является базис полиномов Цернике [6]. Коэффициенты разложения волнового фронта по ортогональным полиномам Цернике позволяют определить среднеквадратическую ошибку отклонения от идеального фронта. Коэффициенты с высоким абсолютным значением автоматически указывают на aberrации, которые наибольшим образом искажают волновой фронт.

Для прямого измерения коэффициентов aberrаций волнового фронта оптической системы предлагается использовать ДОЭ, согласованные с набором полиномов Цернике [7,8,9], которые были успешно применены для анализа волнового фронта с небольшими aberrациями [10-11].

Каждый полином Цернике связан с особым типом оптической ошибки или отклонением волнового фронта. Ошибки могут быть описанным как комбинация основных aberrаций оптической системы.

**Таблица 1.** Соответствие функций Цернике типам aberrаций

$N$	$n$	$M$	Тригонометрическое представление	Вид aberrации
1	0	0	1	Constant
2	1	-1	$2r \sin(\theta)$	Tilt
3	1	1	$2r \cos(\theta)$	Tilt
4	2	-2	$\sqrt{6}r^2 \sin(2\theta)$	Astigmatism
5	2	0	$\sqrt{3}(2r^2 - 1)$	Defocus
6	2	2	$\sqrt{6}r^2 \cos(2\theta)$	Astigmatism
7	3	-3	$2\sqrt{2}r^3 \sin(3\theta)$	(Trefoil)
8	3	-1	$2\sqrt{2}(3r^3 - 2r) \sin(\theta)$	Pure coma
9	3	1	$2\sqrt{2}(3r^3 - 2r) \cos(\theta)$	Pure coma
10	3	3	$2\sqrt{2}r^3 \cos(3\theta)$	(Trefoil)
11	4	-4	$\sqrt{10}r^4 \sin(4\theta)$	Quadrofol
12	4	-2	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \sin(2\theta)$	2 <sup>th</sup> order Astigmatism
13	4	0	$\sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$	Spherical
14	4	2	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos(2\theta)$	2 <sup>th</sup> order Astigmatism
15	4	4	$\sqrt{10}r^4 \cos(4\theta)$	Quadrofol

В данной работе рассматриваются функции Цернике в следующем виде:

$$Z_{nm}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}} R_n^m(r) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где  $R_n^m(r)$  – радиальные полиномы Цернике

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^p (n-p)!}{p! \left(\frac{n+m}{2} - p\right)! \left(\frac{n-m}{2} - p\right)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2p}$$

Аберрации волнового фронта, встречающиеся в оптических системах, обычно описываются в терминах функций Цернике следующим образом:

$$W(r, \varphi) = \exp[i\psi(r, \varphi)], \quad (2)$$

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n c_{nm} Z_{nm}(r, \varphi). \quad (3)$$

Для удобного визуального представления на рис. 1 показана «пирамида Цернике», состоящая нескольких первых функций Цернике. По вертикали изменяются радиальные номера от  $n=0$  до 4, а по горизонтали – азимутальные номера от  $m=-n$  до  $m=n$ .

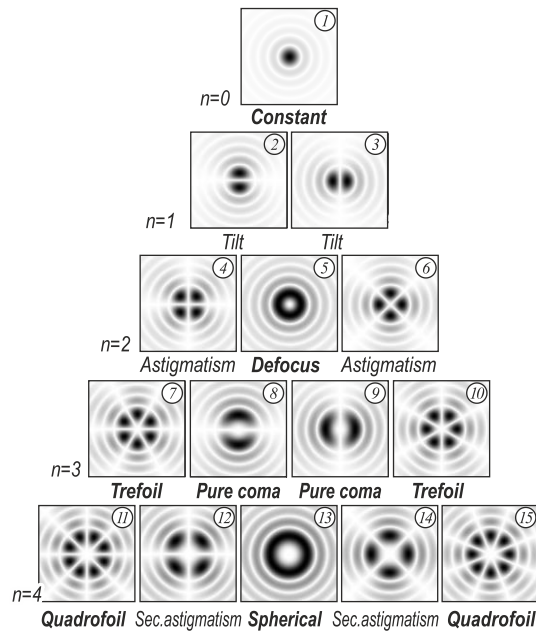


Рис. 1. Вид нескольких функций Цернике.

Для построения картин функции рассеяния точки (ФРТ) в присутствии типичных аберраций мы использовали простейшую оптическую систему Фурье-коррелятора (рис. 2) в среде Zemax [12].

Оценка качества изображения состоит в наблюдении системы в зоне изображения, и измерении фотометрической структуры этого изображения, т.е. определении функции рассеяния (например, ФРТ). На практике именно эти характеристики показывают количественно качество изображения оптической системы. Методы оценки качества изображения такого рода имеет одно большое достоинство – они учитывают все без исключения факторы, которые участвуют в формировании структуры реального оптического изображения.

Экспериментально найденная ФРТ характеризует качество системы. Она позволяет учитывать все особенности волновой поверхности, сформированной системой, включая характер микрорельефа оптических поверхностей.

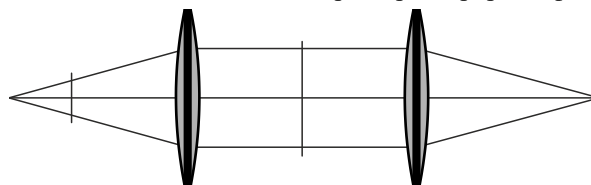


Рис. 2. Оптическая схема Фурье-коррелятора.

Оптические элементы системы работают согласованно, чтобы создать изображение. Однако изображение в реальной системе никогда не бывает совершенным. Появление дополнительных оптических аберраций, связанных с неровностями на поверхности, не точным совпадением осей элементов системы и другими причинами, существенно ухудшают качество изображения. Для компенсации искажений волнового фронта, необходимо определить, какие именно аберрации привели к этим искажениям.

К первой поверхности второй линзы были последовательно применены различные аберрации.

Для моделирования подобной ситуации воспользуемся алгоритмом, который представлен в статье [13]. Для удобного визуального представления на рис. 3 показана «пирамида ФРТ», соответствующая пирамиде Цернике.

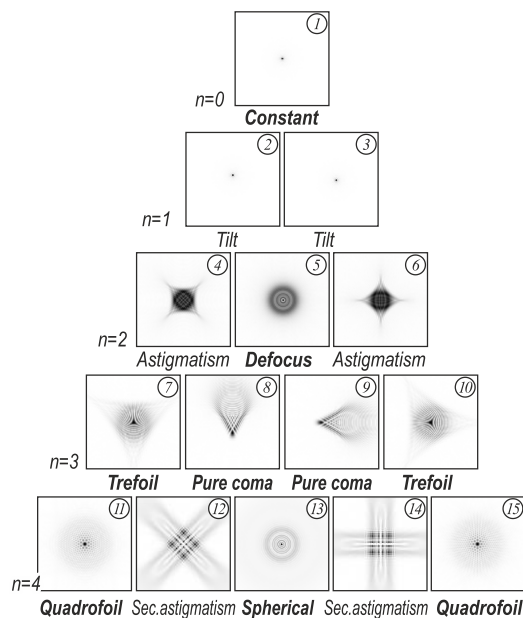


Рис. 3. Вид ФРТ, соответствующих типичным aberrациям.

## 2. Анализ aberrации волнового фронта

В работе [14] рассмотрена возможность применения многопорядкового ДОЭ для анализа aberrаций оптической системы человеческого глаза [15,16].

Заметим, что кроме нумерации и нормировки, функции Цернике могут отличаться по угловой зависимости. В частности, для анализа волнового фронта с помощью многоканальных дифракционных оптических элементов рассматривались как экспоненциальная, так и тригонометрическая угловая зависимость [17].

Оптический анализатор Цернике представляет собой комбинацию ДОЭ и линзы, причём ДОЭ согласован с базисной функцией, а линза выполняет преобразование Фурье, в центре которого получится скалярное произведение.

Для реализации многоканального фильтра необходимо закодировать в ДОЭ несколько базисных функций в разных дифракционных порядках (рис. 4).

$$\tau(x, y) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \Psi_{pq}^*(x, y) \exp[i(\alpha_{pq}x + \beta_{pq}y)] \quad (4)$$

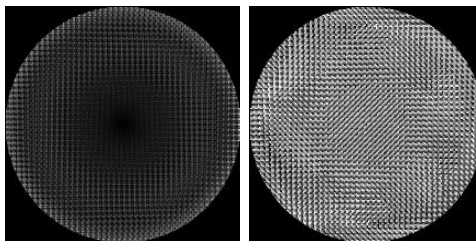


Рис.4. Амплитуда и фаза 8-канального ДОЭ.

Пример разложения плоского волнового фронта  $w(x, y) = 1$  с помощью 8-канального фильтра показан на рис. 5. Как видно, в анализируемом поле aberrаций не обнаружено (в центрах дифракционных порядков находятся нулевые значения).

В итоге мы получили готовую математическую модель оптической установки для распознавания aberrаций в исследуемом поле – Цернике анализатор или многоканальный фильтр Цернике (рис. 6.), где на ДОЭ, расположенный в фокальной плоскости линзы О, с закодированными базисными функциями) поступает анализируемое поле  $w(x, y)$ ; О – линза с фокусным расстоянием  $f$ ; результирующая плоскость фильтра Цернике с координатами  $u$  и  $v$ , расположенная в фокальной плоскости линзы.

Проведем тестовый расчет для математической модели Цернике-анализатора на основе суперпозиции двух функций (рис. 7). В данном случае 8-канальный фильтр обнаружил aberrации вида дефокусировка и астигматизм с соответствующими коэффициентами  $C_{20}=0,995$ ,  $C_{22}=0,996$  в анализируемом поле  $w(x, y) = \psi_{2,0}(x, y) + \psi_{2,2}(x, y)$ .

При моделировании волнового фронта используется представление поля (2), (3). Пример анализа комплексного поля, фаза которого представляет собой полином Цернике (3,1), показан на рис. 8. В данном случае 8-канальный фильтр обнаружил комаподобную aberrацию с соответствующим ненулевым коэффициентом  $\sim C_{31}=2,7489$  в анализируемом поле  $w(x, y) = \exp[i\psi_{3,1}(x, y)]$ , где  $C_{31}=2\sqrt{2} \approx 2,8284$ .

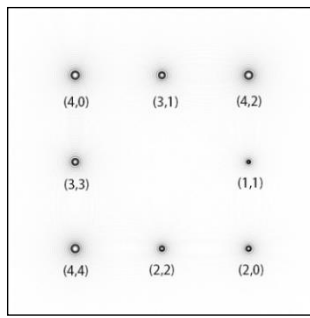


Рис.5. Схематические обозначения базисных функций 8-канального фильтра.

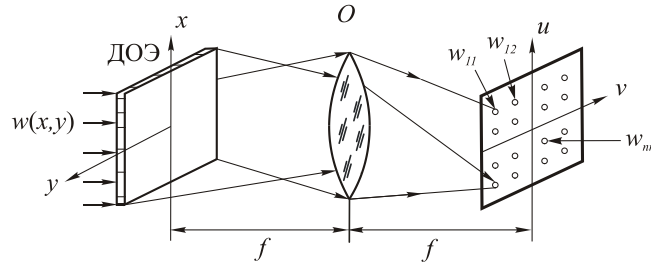


Рис.6. Схематическое представление оптической установки.

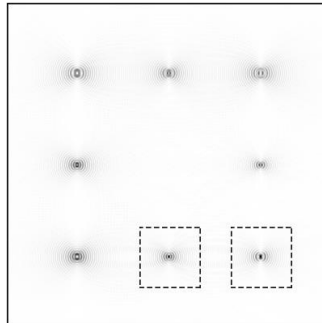


Рис. 7. Амплитуда 8-канального фильтра  $\tau(x,y)$ , анализируемое поле  $w(x,y)=\psi_{2,0}(x,y)+\psi_{2,2}(x,y)$ .

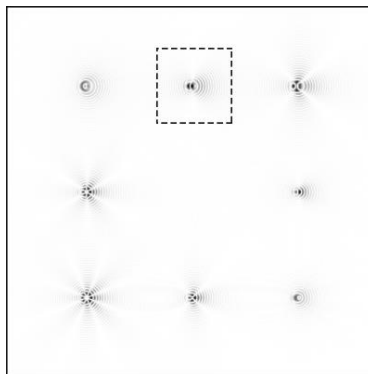


Рис. 8. Амплитуда 8-канального фильтра  $\tau(x,y)$ , анализируемое поле  $w(x,y)=\exp\{i\psi_{3,1}(x,y)\}$ .

Заметим, однако, что успешное детектирование aberrаций будет происходить только в случае малых aberrаций волнового фронта, когда поле может быть приближенно представлено в виде линейной суперпозиции полиномов Цернике. Однако с ростом величины aberrаций линейная аппроксимация становится неприемлемой и происходит ложное детектирование.

В Таблице 2 приведен пример варьирования параметра  $\alpha$  исследуемого поля. Показано, что в результате, как сильного увеличения, так и уменьшения величины  $\alpha$  будет происходить ложное детектирование, т.е. обнаруженный ненулевой коэффициент будет сильно не совпадать с заданным коэффициентом исследуемого поля.

**Таблица 2.** Соответствие величины параметра  $\alpha$  и заданного коэффициента  $C_{31}$  исследуемого поля с обнаруженным ненулевым коэффициентом  $\sim C_{31}$

$\alpha$	$C_{31}$	$\sim C_{31}$
0	2,8284	0,0104
0,25	2,8284	1,6585
0,5	2,8284	2,2136
0,75	2,8284	2,5905
1,0	2,8284	2,7489
1,25	2,8284	2,6919
1,5	2,8284	2,4603
1,75	2,8284	2,1192
2,0	2,8284	1,7398

### 3. Заключение

Заметим, что для компенсации наиболее ярко выраженных аберраций и следовательно, для того что бы убрать основное влияние искажений, выявленных при разложении поля по базису Цернике, достаточно создать поле, комплексно-сопряженное к выявленной аберрации. Такое поле можно создать методами дифракционной оптики, в том числе нанесением соответствующего дифракционного рельефа на поверхность линз.

Стоит добавить, что физический размер предложенного ДОЭ для Цернике анализатора, приблизительно равен 5 мм, а количество точек отсчета в случае 8-канального фильтра  $N=512$ . Легко подсчитать, что разрешающая способность такого элемента будут приблизительно равна 12,4 мкм.

Однако, стоит заметить, что разрешающая способность многоканального дифракционного элемента ограничена, в настоящее время она составляет приблизительно 1 мкм. Разрешающая способность у предложенного 8-канального фильтра далека от критической, что говорит о сравнительно простом процессе нанесения дифракционного рисунка и возможности практического применения фильтра.

Таким образом, показано, что анализ волнового фронта на основе разложения по базису Цернике позволяет найти первопричину искаженного изображения, а коэффициенты с высоким абсолютным значением автоматически указывают на аберрации, которые наибольшим образом искажают волновой фронт.

Что касается пределов работоспособности модели, то здесь в ряде испытаний были определены границы варьирования параметра  $\alpha$ . Оптимальным значением является единица, что не является удивительным фактом. А интервал, в пределах которого происходит оптимальное детектирование, имеет, в среднем, следующий вид  $\{0,5;1,75\}$ .

### Литература

- [1] Гончарский, А.В. Введение в компьютерную оптику / А.В. Гончарский, В.В. Попов, В.В. Степанов – Москва: Издательство МГУ, 1991.
- [2] Lane, R.G. Wave-front reconstruction using a Shack-Hartmann sensor / R. G. Lane, M. Tallon // Appl. Opt. 31(32), 6902-6908 (1992).
- [3] Soifer, V.A. Laser beam mode selection by computer generated holograms / Soifer V.A., Golub M.A. // CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [4] Kotlyar, V.V. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A. // Journal of Modern Optics, 45 (7), 1495-1506 (1998)
- [5] Khonina, S.N. Design of multi-channel phase spatial filter for selection of Gauss-Laguerre laser modes / Khonina S.N., Almazov A.A. // Proceedings of SPIE 4705, 30-39 (2002)
- [6] Вольф, Э. Основы оптики / Э.Вольф, М. Борн – Москва: Наука, 1973.
- [7] Ha, Y. Diffractive optical element for Zernike decomposition / Ha Y., Zhao D., Wang Y., Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A. // Proc. SPIE 3557, 191-197 (1998).
- [8] Khonina, S.N. Decomposition of a coherent light field using a phase Zernike filter / Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Wang Y., Zhao D. // Proc. SPIE 3573, 550-553 (1998).
- [9] Khonina, S.N. Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11(2). – P.442–445.
- [10] Kotlyar, V.V. Coherent field phase retrieval using a phase Zernike filter / Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A., Wang Y., Zhao D. // Computer Optics 1997; 17: 43-48.
- [11] Khonina, S.N. Zernike phase spatial filter for measuring the aberrations of the optical structures of the eye / Khonina S.N., Kotlyar V.V., Kirsh D.V. // Journal of Biomedical Photonics Engineering 2013; 1(2): 146-153.
- [12] Zemax® User's Guide // Zemax Development Corporation. – 2005.
- [13] Хорин, П.А. Анализ аберраций роговицы человеческого глаза / П.А. Хорин, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков, С.Л. Бранчевский // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 810-817.
- [14] Kirilenko, M.S. Wavefront analysis based on Zernike polynomials / M.S. Kirilenko, P.A. Khorin, A.P. Porfirev // CEUR Workshop Proceedings. –2016. – Vol. 1638. –P. 66-75.
- [15] Lombardo, M. Wave aberration of human eyes and new descriptors of image optical quality and visual performance / Lombardo M., Lombardo.G // J Cataract Refract Surg 2010; 36:313–331.
- [16] Westheimer, G. Influence of ocular light scatter on the eye's optical performance / Westheimer G., Liang J. // J Opt Soc Am A 1995; 12:1417– 1424.
- [17] Карпеев, С.В. Оптический анализ световых полей с помощью многопорядковых ДОЭ, согласованных с функциями Цернике / Карпеев С.В., Хонина С.Н. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва, №4(24), 202-214 (2010)