Деконволюция сигналов аналитических приборов в базисе функций Чебышева-Эрмита

А.В. Бочкарев[1]

[1]*Самарский государственный технический университет, Молодогвардейская 244, Самара, Россия, 443100*

Аннотация

В работе представлены выражения для вычисления деконволюции сигналов аналитических приборов или хроматограмм с их предварительным кодированием в базисе функций Чебышева-Эрмита. Приведен пример вычисления деконволюции, описан алгоритм применения сформированных выражений.

Ключевые слова

Деконволюция, функции Чебышева-Эрмита, кодирование, преобразование Фурье, повышение разрешения, хроматограмма, аналитические приборы

1. Введение

При работе с сигналами аналитических приборов часто возникает проблема низкого их разрешения, что связано с неидеальностью таких приборов и сложностью их точной настройки. В общем случае считают, что снижение разрешения математически может быть описано как свертка исходного сигнала (высокого разрешения) с аппаратной функцией аналитического прибора, в качестве которой в общем случае принимают гауссиану и задача повышения разрешения сводится к деконволюции имеющегося сигнала [1].

Автор предлагает для деконволюции сигналов воспользоваться функциями Чебышева-Эрмита [2]. Это дает возможность избавиться от необходимости перевода в частотную область исследуемого сигнала и ядра свертки, поскольку реализуется деконволюция путем умножения коэффициентов разложения сигнала в базисе озвученных функций на представленные в настоящей работе выражения. Для данных функций разработаны выражения перехода от коэффициентов кодирования к производным и вейвлет преобразованию [3,4], что позволяет при анализе сигналов аналитических приборов применять несколько различных преобразований одновременно, сохраняя в памяти только коэффициенты кодирования.

2. Деконволюция сигнала в базисе функцям Чебышева-Эрмита

Функции Чебышева-Эрмита n порядка со сдвигом x_0 и масштабом γ задаются выражением:

$$\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}}\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right), \quad (1)$$

где $H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ - нормализованный полином Эрмита [5].

Для кодирования сигнала $f(x)$ в базисе из N указанных выше функций вычисляют коэффициенты c_n его разложения по -ым функциям, при этом, для восстановления сигнала можно воспользоваться выражением:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N} c_n\,\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right). \quad (2)$$

В качестве ядра свертки используется гауссиана со среднеквадратичной шириной w:

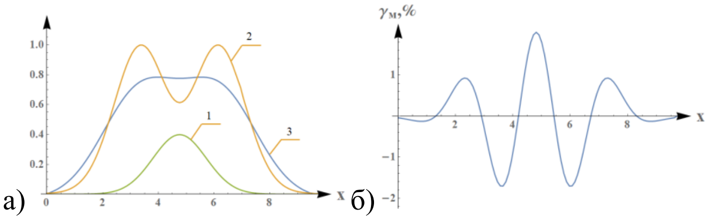
$$G(x)=\frac{1}{w\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2w^2}}. \quad (3)$$

Для деконволюции $f(x)$, закодированного в базисе $\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ можно воспользоваться выражением (2), заменив в нем $\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ на деконволюцию $\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ с ядром свертки (3):

$$\varphi_n^{dec}\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)=\frac{n!\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2(\gamma^2-w^2)}}}{2\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left[He_{n-2k}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\gamma^2-w^2}}\right)\frac{1}{k!\,(n-2k)!}\left(\frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2-w^2}}\right)^{n-2k+1}\right], \tag{4}$$

где $He_{n-2k}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\gamma^2-w^2}}\right)$ - ненормализованный полином Эрмита [5].

Для проверки работы алгоритма зададим сигнал $f(x)=e^{-\frac{(x-4.5)^2}{2}}+e^{-\frac{(x-4.5)^2}{2}}$, подвергнутого свертке с (3) при w=1. Для оценки погрешности работы алгоритма воспользуемся приведенной погрешностью. Результаты при N=10 представлены на Рисунке 1.



А – деконволюция, Б –погрешность,1 – $G(x)$, 2 – $f(x)$, 3 – $\left(G(x)*f(x)\right)$

Рисунок 1: Результаты работы алгоритма

3. Заключение

Выполняя в (2) замену $\varphi_n^{dec}\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)=\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ по коэффициентам кодирования c_n можно восстановить сигнал с повышенным разрешением. При этом, закодировав полученный сигнал повышенного разрешения в базисе функций Чебышева-Эрмита возможно получить выражения для вычисления коэффициентов кодирования сигнала с повышенным разрешением, тем самым устраняя необходимость в хранении коэффициентов сигнала низкого разрешения.

4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90014.

5. Литература

[1] Felinger, A. Data Analysis and Signal Processing in Chromatography // Data Handling in Science and Technology. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – Vol. 21. – 334 p.

[2] Балакин, Д.А. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов / Д.А. Балакин, В.В. Штыков // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9. – С. 1-15.

[3] Сайфуллин, Р.Т. Вычисление производных аналитического сигнала в базисе функций Чебышева-Эрмита / Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев // Материалы XI Всерос. науч. конф. с междунар. уч. «Математическое моделирование и краевые задачи» (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). – 2019. – Т. 2. – С. 137-139.

[4] Сайфуллин, Р.Т. Алгоритм вычисления коэффициентов вейвлет-преобразования сигналов с использованием базиса функций Чебышева-Эрмита / Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: техн. науки. – 2019. – № 4(64). – С. 113-124.

[5] Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.