

## Аннотация

Рассматривается класс сингулярно возмущенных дифференциальных систем, описывающих динамику многозвенного робота-манипулятора с упругими сочленениями в условиях слабой диссипации. Устанавливается существование замены переменных, осуществляющей разделение быстрых и медленных составляющих движения. Расщепляющее преобразование строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Декомпозиция исходной разнотемповой системы на подсистемы меньшей размерности позволяет упростить задачи управления роботом.

*Ключевые слова:* математическая модель; декомпозиция; интегральные многообразия; асимптотические методы

## 1. Введение

Исследование динамики многомерных робототехнических систем и решение задач управления такими системами сопряжено с трудностями, обусловленными наличием разнотемповых составляющих движения.

Для описания динамики многозвенного робота-манипулятора с упругими сочленениями в условиях слабой диссипации используется класс сингулярно возмущенных квазиосциллирующих систем. Особенностью рассматриваемого класса систем является то, что для них не выполнены условия классической теоремы А.Н.Тихонова, что осложняет решение задач анализа и управления. В связи с этим актуальной становится проблема декомпозиции модели с выделением "быстрой" и "медленной" подсистем.

Для решения данной задачи предлагается использовать идеи метода геометрической декомпозиции [1- 8], базирующегося на теории интегральных многообразий медленных и быстрых движений и использующего приемы асимптотических методов анализа. В работе обсуждаются особенности применения предлагаемого подхода для рассматриваемого класса систем и возможность использования медленной подсистемы в качестве редуцированной модели. Устанавливается существование расщепляющего преобразования, позволяющего производить декомпозицию исходной системы. Расщепляющее преобразование эффективно строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. Подобные вопросы для других классов квазиосциллирующих систем рассматривались в работах [9-12].

## 2. Описание модели

Рассмотрим динамическую модель  $n$ -звенного манипулятора с упругими сочленениями. Каждое сочленение имеет привод. Податливость  $i$ -ого кинематического сочленения моделируется пружиной кручения с линейной жесткостной характеристикой при наличии демпфирования. Предполагается, что коэффициенты упругости пружин сочленений достаточно большие величины одного порядка. Обозначим через  $q_{1i}$  и  $q_{2i}$  – углы, характеризующие положение звеньев манипулятора и роторов, соответственно (рис. 1.)

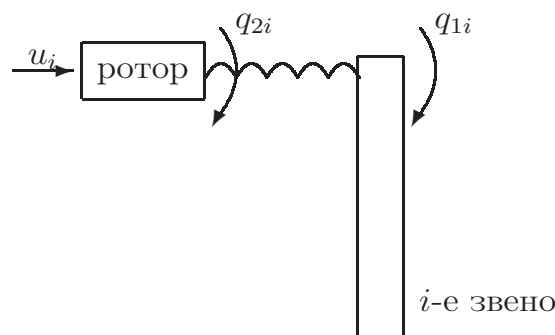


Рис. 1. Звено манипулятора.

Уравнения, описывающие динамику робота, имеют вид [13–15]

$$\begin{aligned} D(q_1)\ddot{q}_1 + c(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) + B(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= 0, \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) - B(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= u, \end{aligned} \quad (1)$$

где координаты векторов  $q_1 \in R^n$  и  $q_2 \in R^n$  – углы, характеризующие положение звеньев манипулятора и роторов, соответственно  $D(q_1)$  – матрица инерции звеньев,  $J$  – диагональная матрица инерции роторов, вектор  $c(q_1, \dot{q}_1)$  определяется кориолисовой, центробежной и гравитационной составляющими,  $K = k \text{diag}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n)$  – диагональная матрица жесткости связей.  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$  – диагональная матрица демпфирования. В качестве управляющих воздействий выступают крутящие моменты.

Введем в рассмотрение малый параметр  $\mu = 1/k$ . Тогда матрица  $K$  примет вид  $K = K = \frac{1}{\mu} \bar{K}$  где  $\bar{K} = \text{diag}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n)$ . Заметим, что в работах [13, 14] при построении комбинированного управления предполагается, что  $B_j = \bar{B}_j/\mu$ , или  $B_j = \bar{B}_j/\sqrt{\mu}$ , что означает наличие в системе достаточно большой диссипации. Это ограничение обеспечивает выполнение условий теоремы А.Н. Тихонова об асимптотической устойчивости присоединенной системы и обеспечивает допустимость использования порождающей системы в качестве редуцированной модели. В настоящей работе предполагается  $B_j = O(1)$  и условия данной теоремы не выполнены. Тем не менее, удается обосновать существование притягивающего интегрального многообразия медленных движений и алгоритм декомпозиции.

Введем переменные  $q = q_1$ ,  $z = k(q_1 - q_2)$ . Получим систему вида

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= a_1(q, \dot{q}) + A_1(q)z + \mu A_3(q)\dot{z}, \\ \mu \ddot{z} &= a_2(q, \dot{q}) - A_2(q)z - \mu A_4(q)\dot{z} + M_2 u, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(q, \dot{q}) &= a_2(q, \dot{q}) = -D^{-1}(q)c(q, \dot{q}), \quad A_1(q) = -D^{-1}(q)\bar{K}, \\ A_2(q) &= (D^{-1}(q) + J^{-1})\bar{K}, \quad A_3(q) = -D^{-1}(q)B, \\ A_4(q) &= (D^{-1}(q) + J^{-1})B, \quad M_2 = -J^{-1}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $z_1 = z$ ,  $z_2 = \dot{z}$  и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1(x) + A_1(x_1)z_1 + \mu A_3(x_1)z_2, \\ \mu \dot{z}_1 &= \mu z_2, \\ \mu \dot{z}_2 &= a_2(x) - A_2(x_1)z_1 - \mu A_4(x_1)z_2 + M_2 u(t, x, \mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Будем рассматривать управляющее воздействие вида

$$u(t, x, \varepsilon) = u^{(0)}(t, x) + \mu u^{(1)}(t, x) + \dots$$

### 3. Интегральное многообразие медленных движений

В работе [16] получены условия существования интегрального многообразия медленных движений системы (3) вида

$$z_i = h_i(t, x, \mu), \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

и доказано, что оно может быть построено с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра

$$z_i = h_i^{(0)}(t, x) + \mu h_i^{(1)}(t, x) + \mu^2 h_i^{(2)}(t, x) + \dots, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Подставляя (5) в систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (a_1(x) + A_1(x)h_1 + \mu A_3(x)h_2) &= h_2, \\ \mu \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (a_1(x) + A_1(x)h_1 + \mu A_3(x)h_2) \right) &= \\ = a_2(x) - A_2(x)h_1 - \mu A_4(x)h_2 + M_2 u(t, x, \mu), \\ h_i &= h_i(t, x, \mu) \end{aligned}$$

и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $\mu$ , можно определить  $h_i^{(j)} = h_i^{(j)}(t, x)$  для произвольного значения  $j$ .

Для  $h_i^{(0)}$  имеем

$$\begin{aligned} h_1^{(0)} &= A_2^{-1}(x)[a_2(x) + M_2 u_0(t, x)], \\ h_2^{(0)} &= \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_2} [a_1(x) + A_1(x)h_1^{(0)}]. \end{aligned}$$

Для  $h_i^{(1)}$  получаем

$$\begin{aligned} h_1^{(1)} &= A_2^{-1}(x) \left[ -\frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial x_2} [a_1(x) + A_1(x)h_1^{(0)}] - A_4(x)h_2^{(0)} + M_2 u_1(t, x) \right], \\ h_2^{(1)} &= \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial x_2} [a_1(x) + A_1(x)h_1^{(0)}] + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_2} [A_1(x)h_1^{(1)} + A_3(x)h_2^{(0)}]. \end{aligned}$$

#### 4. Расщепляющее преобразование

Введем малый параметр  $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ , новые переменные  $y_1 = z_1$ ,  $y_2 = \varepsilon \dot{y}_1$  и перепишем систему (3) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + F(x)y, \\ \varepsilon \dot{y} &= p(x) + P(x, \varepsilon)y + Mu(t, x, \varepsilon),\end{aligned}\quad (6)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1(x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2(x) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad P(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2(x) & -\varepsilon A_4(x) \end{pmatrix}.$$

Интегральное многообразие медленных движений системы (6) примет вид

$$y = h(t, x, \varepsilon), \quad h(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} h_1(t, x, \varepsilon^2) \\ \varepsilon h_2(t, x, \varepsilon^2) \end{pmatrix}\quad (7)$$

В окрестности интегрального многообразия (7) введем новые переменные  $w = x - v$ ,  $s = y - h(t, x, \varepsilon)$  и рассмотрим расширенную вспомогательную систему

$$\begin{aligned}\dot{v} &= V(t, v, \varepsilon), \\ \dot{w} &= W(t, v, w, s, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{s} &= S(t, v, w, s, \varepsilon),\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}V(t, v, \varepsilon) &= f(v) + F(v)h(t, v, \varepsilon), \\ W(t, v, w, z, \varepsilon) &= f(v+w) - f(v) + F(v+w)(z + h(t, v+w, \varepsilon)) - F(v)h(t, v, \varepsilon), \\ S(t, v, w, s, \varepsilon) &= (P(v+w, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h(t, v+w, \varepsilon)}{\partial x} F(v+w))s.\end{aligned}$$

Получены условия, при которых у системы (8) существует интегральное многообразие быстрых движений вида

$$w = \varepsilon H(t, v, s, \varepsilon),\quad (9)$$

где функция  $H$  может быть найдена в виде асимптотического разложения

$$H(t, v, s, \varepsilon) = H^{(0)}(t, v, s) + \varepsilon H^{(1)}(t, v, s) + \dots$$

из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial v} V(t, v, \varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial s} S(t, v, \varepsilon H, s, \varepsilon) = W(t, v, \varepsilon H, s, \varepsilon)\quad (10)$$

Разлагая входящие в уравнение (10) векторные и матричные функции в ряды по степеням  $\varepsilon$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial s} P^{(0)}(v)s &= F^{(0)}(v)s, \\ \frac{\partial H^{(1)}}{\partial s} P^{(0)}(v)s &= \tilde{W}^{(1)}(t, v, s, H^{(0)}), \\ \tilde{W}^{(1)}(t, v, s, H^{(0)}) &= W^{(1)}(t, v, s) - \frac{\partial H^{(0)}}{\partial v} V^{(0)}(t, v) - \frac{\partial H^{(0)}}{\partial s} S^{(1)}(t, v, s), \\ \frac{\partial H^{(i)}}{\partial s} P^{(0)}(v)s &= \tilde{W}^{(i)}(t, v, s, H^{(0)}, H^{(1)}, \dots, H^{(i-1)}), \quad i > 1.\end{aligned}\quad (11)$$

Представим функции  $H^{(i)}$ ,  $\tilde{W}^{(i)}$  при достаточно малых  $s$  в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned}H^{(i)}(t, v, s) &= \sum_{j \geq 1} H^{(i,j)}(t, v, s), \\ \tilde{W}^{(i)}(t, v, s, H^{(1)}, \dots, H^{(i-1)}) &= \sum_{j \geq 1} \tilde{W}^{(i,j)}(t, v, s).\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь  $H^{(i,j)}$ ,  $\tilde{W}^{(i,j)}$  — векторные функции, компонентами которых являются формы  $j$ -го порядка координат вектора  $s$ . Из соотношений (11) для определения коэффициентов форм  $H^{(i,j)}$  получим линейные алгебраические системы.

В рассматриваемой задаче, если ограничиться линейными по  $s$  членами, получаем

$$H^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1(v)A_2^{-1}(v) \end{pmatrix} s.$$

Движение по интегральному многообразию (9) описывается "блочно-треугольной" системой

$$\begin{aligned} \dot{v} &= V(t, v, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{s} &= S(t, v, \varepsilon H(t, v, s, \varepsilon), s, \varepsilon) s, \end{aligned} \tag{13}$$

Установлено, что замена переменных

$$x = v + \varepsilon H(t, v, s, \varepsilon), \quad y = s + h(t, x, \varepsilon), \tag{14}$$

приводит рассматриваемую разнотемповую систему (6) к "блочно-треугольному" виду (13) с независимой медленной подсистемой и быстрой подсистемой, описывающей гаснущие высокочастотные колебания. Установлено, что интегральное многообразие медленных движений  $y = h(t, x, \varepsilon)$  обладает свойством притяжения. В связи с этим медленная подсистема системы (13), описывающая движение на интегральном многообразии (7), наследует важнейшие свойства исходной системы и может рассматриваться в качестве редуцированной модели робота с упругими сочленениями при решении широкого круга задач анализа и синтеза управляющих воздействий. Редуцированная модель имеет размерность вдвое меньшую по сравнению с исходной и не содержит разнотемповых переменных. В работах [11, 17] редуцированные модели использовались для решения задач управления и оценивания для однозвенного манипулятора.

### 5. Иллюстративный пример

Рассмотрим задачу управления двухзвенным манипулятором с упругими сочленениями. Динамика манипулятора описывается системой вида (1), где

$$\begin{aligned} D(q_1) &= \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos \varphi_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos \varphi_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos \varphi_2 & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ \theta_1 &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad \theta_2 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2, \quad \theta_3 = m_2 l_1 l_{c_2}, \quad \theta_4 = m_1 l_{c_1}, \quad \theta_5 = m_2 l_1, \quad \theta_6 = m_2 l_{c_2}, \\ c(q_1, \dot{q}_1) &= \theta_3 \sin \varphi_2 \begin{pmatrix} -2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_1^2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} (\theta_4 + \theta_5) \cos \varphi_1 + \theta_6 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \theta_6 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$m_i$  – массы звеньев,  $\varphi_1$  – угол поворота первого звена относительно горизонтали,  $\varphi_2$  – угол поворота второго звена относительно первого,  $l_i$  – длины звеньев,  $l_{c_i}$  – расстояния до центров тяжести звеньев,  $I_i$  – моменты инерции звеньев [18].

Пользуясь изложенным выше алгоритмом произведем декомпозицию системы (1), порядок которой равен 8, выделив независимую медленную подсистему четвертого порядка и быструю подсистему, описывающую затухающие высокочастотные колебания. Построим управляющее воздействие с целью обеспечения перехода звеньев манипулятора в заданные фиксированные положения. Для построения управляющего воздействия будем использовать редуцированную медленную подсистему.

На рис. 2, 3 приведены графики изменения углов поворота звеньев манипулятора для следующих значений параметров системы:

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 5, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 1, \quad l_{c_1} = 0.5, \quad l_{c_2} = 0.5, \quad J_1 = 1, \quad J_2 = 1, \quad \tilde{K}_1 = 1, \quad \tilde{K}_2 = 1, \quad \varepsilon = 0.1.$$

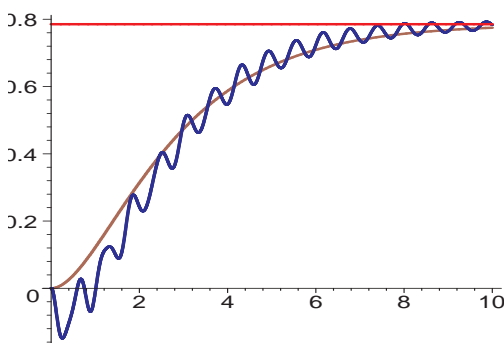


Рис. 2. Угол поворота первого звена  $\varphi_1(t)$ .

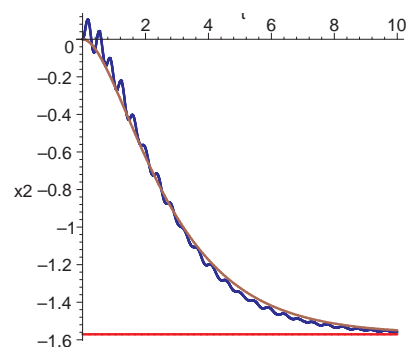


Рис. 3. Угол поворота второго звена  $\varphi_2(t)$ .

Видно, что интегральные кривые исходной системы, характеризующиеся наличием гаснущих высокочастотных колебаний, приближаются к интегральным кривым редуцированной системы, которые в свою очередь, в соответствии с заданным законом управления, приближаются к желаемым стационарным режимам.

## 6. Заключение

Применение метода асимптотической декомпозиции позволяет понизить размерность математической модели манипулятора с упругими сочленениями и упростить задачу построения управляющего воздействия.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской обл. в рамках научного проекта № 16-41-630524.

## Литература

- [1] Sobolev, V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems / V.A. Sobolev // Syst. & Control Lett.– 1984. – No. 5.– P. 169-279.
- [2] Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А.Соболев.– М.: Физматлит, 2009.– 256 с.
- [3] Shchepakina, E. Singular Perturbations: Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell.– In: Springer Lecture Notes in Mathematics, Cham: Springer International Publishing, 2014.– 225 p.
- [4] Voropaeva, N.V. Decomposition of a linear-quadratic optimal control problem with fast and slow variables / N.V. Voropaeva, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control.– 2006.– Vol. 67(8).– P. 1185-1193.
- [5] Voropaeva, N.V. Decomposition of problems of optimal control and estimation for discrete systems with fast and slow variables / N.V. Voropaeva // Automation and Remote Control.– 2008.– Vol. 69(6).– P. 920-928.
- [6] Sobolev, V.A. Singular perturbations in linearly quadratic optimal control problems / V.A. Sobolev // Automation and Remote Control.– 1991.– Vol.52(2).– P. 180-189.
- [7] Vidilina, O.V. The construction of the observers for dynamic systems with fast and slow variables/ O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva // CEUR Workshop Proceedings.–2016.–1638.– P. 750-758.
- [8] Smetannikova, E.N. Regularization of cheap periodic control problems / E.N. Smetannikova, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66(6).– P. 903-916.
- [9] Strygin, V.V. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of satellites with double spin/ V.V. Strygin, V.A. Sobolev // Cosmic Research. – 1976. – Vol. 14(3).– P. 366-371.
- [10] Стрыгин, В.В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев.– М.: Наука, 1988. – 256 с.
- [11] Osintsev, M.S. Dimensionality Reduction in Optimal Control and Estimation Problems for Systems of Solid Bodies with Low Dissipation / M.S. Osintsev, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control.– 2013.– Vol.74(8).– P. 121-137.
- [12] Mortell, M.P. Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V. Sobolev.– Philadelphia: SIAM, 2005. – 358 p.
- [13] Spong, M.W. Modeling and control of elastic joint robots /M.W.Spong // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control.– 1987.– No. 109.– P. 310-319.
- [14] Spong, M.W. An integral manifold approach to feedback control of flexible joint robots / M.W. Spong, K. Khorasani, P.V. Kokotovic // IEEE Journal of Robotics and Automation.– 1987.– Vol. 3(4).– P. 291-301.
- [15] Moberg, S. On modeling and control of flexible manipulators / S. Moberg.– Linköping: Linköping University, 2007.
- [16] Видилина, О.В. Редукция математической модели робота с упругими сочленениями / О.В. Видилина, Н.В. Воропаева // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия.– 2014.– Вып.3(114).– С.16-29.
- [17] Воропаева, Н.В. Декомпозиция разнотемповых динамических систем со слабой диссипацией / Н.В. Воропаева // Вестник СамГУ. – Естественнонаучная серия.– 2013.– Вып. 9/2(110).– С. 5-10.
- [18] Spong, M.W. On the robust control of robot manipulators / M.W. Spong // IEEE Trans. Automatic Control.– 1992.–Vol. 37(11).– P. 1782-1786.