

Численные эксперименты моделирования транспорта наносов и динамики изменения рельефа дна мелководных водоемов

А.И. Сухинов¹, Е.А. Проценко², В.В. Сидорякина², С.В. Проценко¹

¹Донской государственной технической университет, площадь Гагарина 1, Ростов-на-Дону, Россия, 344000

²Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, Инициативная 48, Таганрог, Россия, 347936

Аннотация. Процесс транспорта наносов является объектом постоянного изучения, поскольку представляет ценность при прогнозе распространения загрязнений и изменения рельефа дна. Чаще всего прогностические исследования в этой области строятся на основе математических моделей, которые позволяют сократить, а в ряде случаев исключить дорогостоящие и опасные в экологическом отношении эксперименты. Для прогнозирования изменения рельефа дна в работе используется нестационарная 2D модель транспорта наносов, учитывающая следующие физически значимые факторы и параметры: пористость грунта; критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов; турбулентный обмен; динамически изменяемую геометрию дна, ветровые течения и трение о дно. Предложена и исследована дискретная модель транспорта наносов, полученная в результате аппроксимации соответствующей линейризованной непрерывной модели. Для предложенной модели гидродинамических процессов разработаны параллельные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ. Выполнены численные эксперименты для модельных задач транспорта донных отложений и трансформации рельефа дна, результаты которых согласуются с реальными физическими экспериментами.

1. Введение

В современных условиях прибрежные зоны являются местом, где особенно остро ощущается необходимость охраны окружающей среды и рационального природопользования водного объекта. Современное экологическое состояние прибрежных систем в значительной степени определяется разнообразием поступающих в них твердых частиц как минерального, так и органического происхождения. Под воздействием комплекса внутриводоемных процессов происходит трансформация и осаждение частиц взвешенного вещества и, как следствие, формирование донных отложений. Наносы прибрежных систем представляют собой сложную гетерогенную физико-химическую систему, исследование процессов внутри которой в современных условиях является важной и актуальной задачей [1] – [4].

В настоящей работе авторами предложена и исследована дискретная пространственно-двумерная модель транспорта наносов, полученная в результате аппроксимации соответствующей линейризованной непрерывной модели и дополненная уравнениями: Навье-Стокса, неразрывности, состояния водной среды. Модель учитывает следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором

начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна, ветровые течения и трение о дно [5] – [9]. Рассмотрены параллельные алгоритмы совместного численного решения задач транспорта наносов и волновой гидродинамики на супервычислительной системе с распределенной памятью при относительно небольшом количестве ядер (до 2048). Также авторами исследованы вопросы распараллеливания процессов численного решения данных задач на массивно-параллельных системах, обеспечивающих высокую эффективность алгоритмов для систем, содержащих многие десятки тысяч ядер. Для решения системы сеточных уравнений использовался адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод. Приведены результаты численных экспериментов.

2. Постановка задачи

Водные потоки несут большое количество твердых частиц – наносов, перемещая частицы глины, илистых веществ, гравия, гальки, песка, лесса, карбонатных соединений, эмульсии минеральных масел, нефтепродуктов и другие составляющие. Поверхности частиц наносов способны поглощать различные загрязняющие вещества, среди которых тяжелые металлы и пестициды, оказывающие негативное воздействие на экологическую ситуацию водного объекта [10] – [11]. Наносы могут переноситься течением во взвешенном состоянии (взвешенные наносы), а могут перемещаться в придонном слое потока путем перекачивания, скольжения, сальтации (влекомые наносы) (Рис.1). Частицы наносов, переносимые потоком могут трансформироваться из взвешенного состояния во влекомое и наоборот, влекомые частицы способны перестать двигаться, а неподвижные – прийти в движение. Характер движения взвешенных и влекомых наносов определяется скоростью течения, глубиной и другими гидравлическими элементами водного потока.

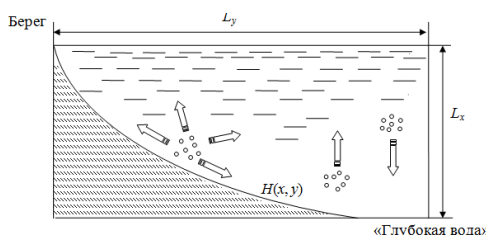


Рисунок 1. Схема движения взвешенных и влекомых наносов.

2.1. Математическое описание задачи транспорта наносов

Следуя [12], рассматривается уравнение транспорта наносов:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) - \operatorname{div} (k \vec{\tau}_b) \quad (1)$$

где $H = H(x, y, t)$ – глубина водоема; ε – пористость донных материалов; $\vec{\tau}_b$ – вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; τ_{bc} – критическое значение тангенциального напряжения; $\tau_{bc} = a \sin \varphi_0$, φ_0 – угол естественного откоса грунта в водоеме; $k = k(H, x, y, t)$ – нелинейный коэффициент, определяемый соотношением:

$$k = \frac{A \tilde{\omega} d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1}, \quad (2)$$

(ρ_1, ρ_0 – плотности частиц донного материала и водной среды соответственно; g – ускорение силы тяжести; $\tilde{\omega}$ – частота волны; A и β – безразмерные постоянные; d – характерные размеры частиц грунта). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, где происходит процесс, и S – ее граница, которая является кусочно-гладкой линией. Областью задания уравнения (1) считаем трехмерный цилиндр $\mathcal{U}_T = D \times (0, T)$ высоты T с основанием D . Его граница состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований: нижнего $\bar{D} \times \{0\}$ и верхнего $\bar{D} \times \{T\}$. Далее для простоты уравнение (1) рассматривается в прямоугольной области $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$.

Дополним уравнение (1) начальным условием предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \text{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{D}), (x, y) \in \bar{D} \quad (3)$$

Сформулируем условия на границе области \bar{D} :

$$\bar{\tau}_b \Big|_{y=0} = 0, \quad (4)$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t), 0 \leq y \leq L_y \quad (5)$$

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), 0 \leq y \leq L_y, \quad (6)$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x), 0 \leq x \leq L_x \quad (7)$$

$$H(x, L_y, t) = 0, 0 \leq x \leq L_x. \quad (8)$$

Дополнительно к граничным условиям (5) – (8) предполагаем выполнение условий их гладкости – существование непрерывных производных на границе области D :

$$\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{D}_T) \cap C^1(D_T). \quad (9)$$

Условие невырожденности оператора задачи имеет вид:

$$k \geq k_0 = \text{const} > 0, \forall (x, y) \in \bar{D}, 0 < t \leq T. \quad (10)$$

Вектор тангенциального напряжения на дне выражается с использованием единичных ортов системы координат:

$$\bar{\tau}_b = \bar{i} \tau_{bx} + \bar{j} \tau_{by}, \tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t), \tau_{by} = \tau_{by}(x, y, t). \quad (11)$$

2.2. Линеаризация задачи транспорта наносов

Методами, изложенными в работах [13] – [14], создадим линеаризованную модель на временном отрезке $0 \leq t \leq T$, построив равномерную сетку ω_τ с шагом τ , т.е. множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$ и осуществим линеаризацию начально-краевой задачи (1) – (8).

Введем обозначения:

$$k^{(n-1)} = \frac{A \tilde{\omega} d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left[\bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right]^{\beta-1}, n = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Тогда уравнение (1) после линеаризации запишем в виде:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \text{div} \left(k^{(n-1)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n)} \right) - \text{div} (k^{(n-1)} \bar{\tau}_b), t_{n-1} < t \leq t_n, n = 1, \dots, N \quad (13)$$

и дополним его начальными условиями:

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), (x, y) \in \bar{D}, n = 2, \dots, N. \quad (14)$$

Член вида $\text{div}(k^{(n-1)} \bar{\tau}_b)$ является при такой линеаризации известной функцией правой части; граничные условия (4) – (8) предполагаются выполненными для всех промежутков времени $t_{n-1} < t \leq t_n, n = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что коэффициенты $k^{(n-1)}, n = 1, 2, \dots, N$ зависят от пространственных переменных x, y и временной переменной $t_{n-1}, n = 1, 2, \dots, N$, определяемой выбором шага τ сетки ω_τ , т.е. $k^{(n-1)} = k^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), n = 1, 2, \dots, N$.

3. Модель гидродинамики

Входными данными сконструированной выше дискретной модели транспорта наносов является поле вектора скорости, что требует в свою очередь, построения математической модели гидродинамики мелководных водоемов. Для расчета тангенциальных напряжений в модели транспорта наносов необходима информация о поле вектора скорости на дне водоема. Для описания движения водной среды использована система уравнений мелкой воды. Исходными уравнениями модели гидродинамики являются [15]:

– уравнение движения (Навье – Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z, \\ w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + g; \end{aligned} \quad (15)$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (16)$$

где $\vec{v} = \{u, v, w\}$ – вектор скорости движения жидкости, P – давление, ρ – плотность, μ, η – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена, g – ускорение свободного падения.

Система уравнений (16) – (17) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе: $\vec{v} = \vec{v}_0, \vec{v}_0$ – постоянный вектор, $P'_n = 0$,

– боковая граница (берег и дно): $\rho \mu (\vec{v}_\tau)'_n = -\tau, \vec{v}_n = 0, P'_n = 0$,

– верхняя граница: $\rho \mu (\vec{v}_\tau)'_n = -\tau, w = -\omega - P'_z / \rho g, P'_n = 0$,

где ω – интенсивность испарения жидкости, \vec{v}_τ, \vec{v}_n – тангенциальная и нормальная составляющие вектора скорости, τ – вектор касательного тангенциального напряжения на поверхности водоема, \vec{n} – вектор нормали к границе расчетной области. Пусть $\tau = \rho_a C d_s \sqrt{w}$, $C d_s = 0.0026$, где w – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы, $C d_s$ – безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, который зависит от скорости ветра, рассматривается в диапазоне 0.0016-0.0032.

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом движения воды можно записать следующим образом $\tau = \rho C d_b \sqrt{v}$, $C d_b = g l^2 / h^{1/3}$, где $l = 0,04$ групповой коэффициент шероховатости в формуле Маннинга, рассматривается в диапазоне 0,025 – 0.2.

4. Описание параллельного алгоритма разработанного программного комплекса

Разработан программный комплекс, реализованный на C++, предназначенный для построения турбулентных потоков несжимаемого поля скоростей водной среды на сетках с высокой разрешающей способностью для прогнозирования транспорта наносов и возможных сценариев изменения геометрии донной области мелководных водоемов. Для решения поставленной задачи использован адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод минимальных поправок. При параллельной реализации использованы методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы.

Программный комплекс включает в себя следующие блоки:

– управляющий блок, в нем содержится цикл по временной координате и вызываются функции: расчет поля скорости без учета давления, расчет функции возвышения уровня, уточнения поля скорости, расчет поля глубины и функции ввода-вывода данных;

– блок построения сеточных уравнений для поля скорости без учета давления в соответствии с конечно-разностной схемой. Считаются и записываются в массив коэффициенты и правая часть соответствующего сеточного уравнения, представленного в канонической форме;

– блок построения сеточных уравнений для расчета функции возвышения уровня;

– блок расчета поля скорости с учетом возвышения уровня (результатом работы данного блока является расчет значений поля вектора скоростей на следующем временном слое);

– блок расчета сеточных уравнений адаптивным модифицированным попеременно-треугольным методом скорейшего спуска;

– блок вывода значений поля скоростей в файлы.

5. Результаты численных экспериментов

После разработки программного комплекса была выполнена серия численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа дна в прибрежной зоне водоема. В модельных задачах предполагалось присутствие на поверхности дна препятствий (валунов, подводных банкет, бун, отвалов и т.п.) и различных неровностей подстилающих его поверхность.

Рассматриваемый участок моделирования имеет размеры 55 м на 55 м по горизонтали и 2 м по вертикали (в глубину), пиковая точка возвышается над уровнем моря до 1 м. Предположим, что жидкость находится в состоянии покоя в начальный момент времени. Размер расчетной сетки равен 110×110 , шаг по пространственным переменным 0,05 м, шаг по времени 0,01 с, скорость движения ветра 5 м/с и направлена слева-направо.

На рисунке 2 представлено начальное положение рельефа дна и изолиний функции глубин, особенностью которого является наличие четырех подводных волноломов. Волноломы имеют длину 45 м, максимальную высоту – 1 м и находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Колебания изолинии функции глубин наблюдаются в центральной и правой части расчетной области.

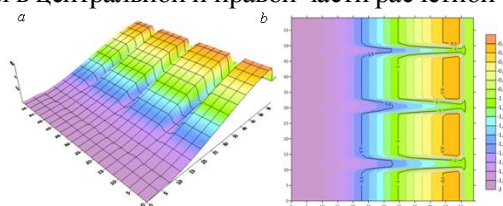


Рисунок 2. Начальное положение геометрии расчетной области (*a* – изображение изолиний функции глубины, *b* – изображение рельефа дна).

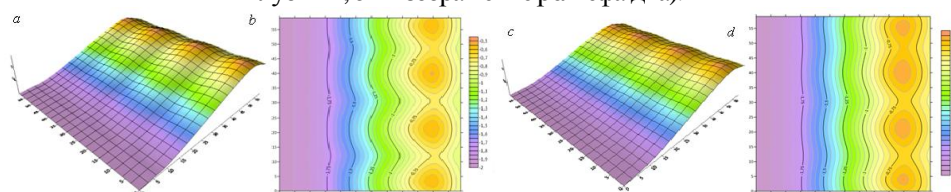


Рисунок 3. Геометрии расчетной области (*a, б* – изображение рельефа дна и изолиний функции глубины соответственно через 5 мин после начала моделирования, *с, d* – изображение рельефа дна и изолиний функции глубины соответственно через 15 мин после начала моделирования).

Моделирование процесса транспорта наносов показало, что с течением времени происходит «сглаживание» неровности на поверхности дна, образование наносов, уменьшение уровня глубины уклона дна и, как следствие, постепенное обмеление рассматриваемой зоны водоема. Так, через 5 мин после начала моделирования изолинии функции глубины в центральной части расчетной области приобрели волнообразный вид, а в правой части (зоне, соответствующей возвышению волноломов) – овальный. В отсеках между волноломами происходит отложение наносов. Вершины волноломов деформировались и приняли форму пологих горок. В следствии указанных процессов наблюдается уменьшение уровня глубины береговой зоны и наращивание территории пляжа (Рис. 3 *a, b*). Более выражены результаты представлены для случая, когда время моделирования составило 15 мин. Так, в течение указанного расчетного времени в отсеках между волноломами уменьшение глубины составило порядка 0,3 м. «Горки» приобретают более «сглаженными» вид. Наблюдается активный процесс вдольберегового перемещения наносов и снижения уровня глубины (Рис. 3 *с, d*).

6. Заключение

Разработана пространственно-двумерная математическая модель транспорта донных материалов, позволяющая предсказывать динамику изменения рельефа дна за счет движения воды и твердых частиц. Модель учитывает пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна, ветровые течения и трение о дно. В работе использована 3D модель гидродинамики мелководных водоемов с учетом транспорта примеси. Модель позволяет

получить трехмерные поля вектора скоростей водного потока, давления, плотности морской воды и примеси. На мелководье в моделях гидродинамики большое влияние на поля течений оказывает геометрия дна водоема. Для повышения точности моделирования гидродинамических процессов при расчете составляющих тангенциального напряжения на дне водоема учитывается групповой коэффициент шероховатости в форме Маннинга. Выбор прямоугольных сеток связан с особенностью геометрии расчетной области, линейные размеры которой вдоль различных направлений существенно отличаются. Если расчетные узлы расположены не строго вертикально по оси o_z и не в горизонтальных плоскостях, то при решении данного класса задач будет велика погрешность аппроксимации для внутренних узлов. Подход, связанный с использованием функции заполненности ячеек, показал свою эффективность при решении задач со сложной, динамически перестраиваемой геометрией расчетной области, кроме того, позволяет уменьшить погрешность аппроксимации границы. Предложенная математическая модель и разработанный программный комплекс позволяют предсказать динамику поведения донной поверхности, появление морских кос и гряд, их рост и трансформацию. Таким образом, работоспособность предложенных математических моделей транспорта наносов подтверждена результатами численного эксперимента.

7. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00701_a).

8. Литература

- [1] Д'Асчензо, Н. Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений / Н. Д'Асчензо, В.И. Савельев, Б.Н. Четверушкин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2015. – Т. 55, № 8. – С. 1320-1328. DOI: 10.7868/S0044466915080037.
- [2] Головизнин, В.М. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике / В.М. Головизнин, Б. Н. Четверушкин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 8. – С. 20-29. DOI: 10.31857/S004446690001998-8.
- [3] Гушин, В.А. Модель транспорта и трансформации биогенных элементов в прибрежной системе и ее численная реализация / В.А. Гушин, А.В. Никитина, А.А. Семенякина, А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 8. – С. 120-137. DOI: 10.31857/S004446690002007-8.
- [4] Lusher, A.L. Occurrence of microplastics in gastrointestinal tract of pelagic and demersal fish from the English channel / A.L. Lusher, M. McHugh, R.C. Thompson // Marine Pollution Bulletin. – 2013. – Vol. 67. – P. 94-99.
- [5] Попков, В.И. Структурные особенности и генезис дислокаций дна Азовского моря / В.И. Попков // Геология, география и глобальная энергия. – 2008. – № 1. – С. 77-90.
- [6] Гушин, В.А. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости / В.А. Гушин, П.В. Матюшин // Матем. моделирование. – 2006. – Т. 18, № 5. – С. 5-20.
- [7] Sukhinov, A.I. 3D Model of Diffusion-Advection-Aggregation Suspensions in Water Basins and Its Parallel Realization / A.I. Sukhinov, A.A. Sukhinov // Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications, Proceedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria – Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo, 2005. – P. 223-230. DOI: 10.1016/B978-044452024-1/50029-4.
- [8] Sukhinov, A.I. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models / A.I. Sukhinov, A.A. Sukhinov // Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications, Proceedings of Parallel CFD Conference, Las Palmas de Gran Canaria – Spain, Elsevier, Amsterdam, 2005. – P. 231-238. DOI: 10.1016/B978-044452024-1/50030-0.
- [9] Леонтьев, И.О. Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов – М.: ГЕОС, 2001. – 272 с.

- [10] Liu, X. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China // *International Journal of Sediment Research*. – 2015. – Vol. 30(3). – P. 250-255.
- [11] Sukhinov, A.I. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes / A.I. Sukhinov, V.V. Sidoryakina // *Computational mathematics and information technologies*. – 2018. – Vol. 2(2). – P. 76-90. DOI: 10.23947/2587-8999-2018-2-76-90.
- [12] Сидорякина, В.В. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / В.В. Сидорякина, А.И. Сухинов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2017. – Т. 57, № 6. – С. 985-1002. DOI: 10.7868/S0044466917060138.
- [13] Сухинов, А.И. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов / А.И. Сухинов, В.В. Сидорякина // *Матем. моделирование*. – 2017. – Т. 29, № 11. – С. 19-39.
- [14] Сухинов, А.И. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / А.И. Сухинов, В.В. Сидорякина, А.А. Сухинов // *Вестник Донского государственного технического университета*. – 2017. – Т. 17, № 1. – С. 5-17. DOI: 10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17.
- [15] Проценко, С.В. Экспериментальное исследование силовых нагрузок на опоры надводной конструкции на основе математической модели волновых процессов / С.В. Проценко, А.М. Атаян, А.Е. Чистяков, А.В. Никитина, В.Н. Литвинов, А.А. Филина // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ.* – 2019. – Т. 8, № 3. – С. 27-42. DOI: 10.14529/cmse190302.

Numerical experiments of modeling sediment transport and dynamics of changes in the topography of shallow water bodies

A.I. Sukhinov¹, E.A. Protsenko², V.V. Sidoryakina², S.V. Protsenko¹

¹Don State Technical University, Gagarin Square 1, Rostov-on-Don, Russia, 344000

²Taganrog Institute of A.P. Chekhov (branch) RGEU (RINE), Initiative Street 48, Taganrog, Russia, 347936

Abstract. The process of sediment transport is an object of constant study, since it is valuable in predicting the spread of pollution and changes in bottom topography. Prognostic studies in this area are based on mathematical models that can reduce, and in some cases eliminate, costly and environmentally hazardous experiments. Non-stationary 2D model of sediment transport is used in the work to predict changes in the bottom topography. The model takes into account soil porosity; the critical value of the shear stress at which sediment movement begins; turbulent exchange; dynamically changing bottom geometry, wind currents and bottom friction. The discrete model of sediment transport, proposed as a result of approximation of the corresponding linearized continuous model, is proposed and investigated. Parallel algorithms are developed that are implemented as a complex of programs for the proposed model of hydrodynamic processes. Numerical experiments were performed for model problems of bottom sediment transport and bottom topography transformation, the results of which are consistent with real physical experiments.