

Численное моделирование процесса индентирования гиперупругих твердых тел

Ю.В. Астапов¹

¹Тульский государственный университет, Ленина 92, Тула, Россия, 300012

Аннотация. Рассматривается процесс индентирования слабосжимаемых упругих материалов по типу эластомеров. Используется вариант нелинейных определяющих соотношений, являющийся обобщением известной модели материала Генки. По серии проведенных опытов на сжатие с каучуковыми образцами определены значения упругих констант, входящие в модель. Численно реализован алгоритм учета контактных граничных условий. Предложенная модель верифицировалась по результатам опыта на индентирование.

1. Введение

Целью работы является построение математической модели, описывающей неоднородные конечные деформации нелинейно упругих слабосжимаемых тел, идентификация входящих в нее параметров и оценка достоверности модели путем сравнения результатов расчета с экспериментальными данными. В основе таких моделей лежат определяющие соотношения, связывающие напряжения и деформации в эластомерах. Открытым является вопрос выбора варианта определяющих соотношений, адекватно описывающих упругое поведение материалов в подобных процессах.

Обычно [1] при медленном квазистатическом нагружении эластомеры считают нелинейно упругими слабосжимаемыми материалами. Модели нелинейной теории упругости условно можно разделить на три группы: обобщение закона Гука на случай конечных деформаций путем использования различных мер конечных деформаций и напряжений (например, тело Сетха), модели гипоупругих и гиперупругих материалов. Материал называют гипоупругим, если скорости напряжений являются однородными линейными функциями скоростей деформаций [1, 2, 4, 10].

К гиперупругим материалам обычно относят модели, в которых постулируется существование упругого потенциала, а напряжения определяются через частные производные от упругого потенциала по инвариантам тензора деформаций Коши–Грина. Наиболее известными моделями гиперупругих тел являются материалы Муни–Ривлина, Мурнагана, Синьорини, Бартенева–Хазановича, Черных–Шубиной и другие [3, 4]. Известно, что в изотропном материале кривернутый тензор напряжений энергетически сопряжен с логарифмической мерой деформаций Генки. В связи с этим в рамках моделей гиперупругих тел предлагается связь между этими тензорами записать в линейном и нелинейном видах. Линейный вариант соотношений аналогичен модели неогукковского материала и для изотропного тела содержит две материальные константы. Нелинейный вариант определяющих соотношений

получен удержанием в разложении для удельной потенциальной энергии деформации членов третьего порядка.

Для рассмотренных моделей эластомеров важным является вопрос об идентификации определяющих соотношений. В данной статье константы материала определяются из опытов на сжатие, проведенных на сконструированном кинематическом стенде, в предположении несжимаемости испытуемого образца. Верификация модели осуществляется на примере решения задачи о внедрении жесткого сферического индентора в нелинейно упругий цилиндр [5, 6, 8, 9, 11].

2. Постановка задачи

Процессы однородного сжатия и индентирования можно рассматривать как квазистатические. Для моделирования квазистатического отклика материала на внешнее силовое воздействие возможно использовать условие равновесного протекания процесса деформирования. Требование равенства нулю не только главного вектора приложенных к телу нагрузок, но и скорости его изменения после применения вариационного принципа Журдена приводит к системе уравнений следующего вида [3]:

$$\begin{cases} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \\ \int_V \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} + \dot{\theta} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{S} – тензор истинных напряжений Коши; $\mathbf{P}^{(n)}$ и \mathbf{F} – внешние поля соответственно поверхностных и массовых сил; ρ – плотность; \mathbf{v} – поле скоростей точек среды, V – объем, занимаемый телом.

После преобразований и исключения из рассмотрения массовых сил получим условие равновесного протекания процесса деформирования (1) в вариационной форме:

$$\int_V (\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} (\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n})) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma, \quad (2)$$

которое должно быть дополнено соотношениями, связывающими скорость изменения напряжений со скоростью деформаций, а также начальными и граничными условиями.

Считаем, что в начальный момент деформирования напряжения в теле отсутствуют. Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности Σ_P закона изменения внешних нагрузок как функции времени и эйлеровых координат

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (3)$$

Граничные условия кинематического типа в каждой точке поверхности Σ_U определяют закон изменения перемещений материальных точек

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (4)$$

2.1. Вариант линейных определяющих соотношений.

При записи определяющих соотношений конечного упругого поведения эластомеров обычно используют пары энергетически сопряженных тензоров напряжений и деформаций, входящих в выражение для удельной мощности напряжений [3]. В работах [7, 10] показано, что в изотропном материале энергетически сопряженными являются обобщенный «повернутый» тензор напряжений $\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ и тензор логарифмических деформаций Генки $\mathbf{\Gamma}$, где \mathbf{U} – левая мера искажений, входящая в полярное разложение

аффинора деформаций. Если считать потенциальную энергию деформаций аналитической функцией тензора деформаций Генки, получим разложение вида:

$$W = W_0 + \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \frac{1}{2!} \mathbf{N} \cdot \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} \cdot \cdot \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \dots, \quad (5)$$

где $W_0 = 0$, $\mathbf{A} = 0$ для начального ненапряженного состояния, а тензоры \mathbf{N} и \mathbf{L} – тензоры упругих констант материала. Если в разложении (5) сохранить только член второго порядка относительно тензора логарифмических деформаций, то, воспользовавшись тем, что $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}$, и с учетом выражения для компонент тензора \mathbf{N} через константы K и G в изотропном материале, получим:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = K\theta\mathbf{E} + 2G \left(\boldsymbol{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E} \right), \quad (6)$$

где $\theta = I_1(\boldsymbol{\Gamma})$ – первый инвариант тензора Генки.

С целью использования в вариационных соотношениях (2) соотношений (6) требуется продифференцировать последние по времени в предположении, что константы материала не изменяются:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{R}} = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right). \quad (7)$$

2.2. Вариант нелинейных определяющих соотношений с использованием меры Генки.

Удержание в разложении удельной потенциальной энергии (5) двух первых ненулевых членов приводит к следующему виду определяющих соотношений:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \sigma_0\mathbf{E} + \tau_e\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} + \tau_q\mathbf{Q}, \quad (8)$$

где σ_0 , τ_e , τ_q – функции инвариантов меры деформации: θ – относительного изменения объема, и $e = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}$ – интенсивности формоизменения, определенные следующим образом: $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$, $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$, $\tau_q = C_3$. Тензор $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – девиатор тензора логарифмических деформаций, а тензор \mathbf{Q} определяется как девиатор тензора $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^2$. Формальное дифференцирование (7) приводит к следующей форме определяющих соотношений, записанной в скоростях:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{R}} = & \left((K - \frac{2}{3})\dot{\theta} + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - 2\frac{C_2}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}C_3)\theta\dot{\theta} + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)e\dot{e} \right)\mathbf{E} + \\ & + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)\dot{\theta}\boldsymbol{\Gamma} + (2G + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)\theta)\boldsymbol{\Gamma} + C_3(\dot{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}}). \end{aligned} \quad (9)$$

В соотношениях (9) подлежат определению константы материала K , G , C_1 , C_2 , C_3 , причем первые две из них являются константами линейной теории упругости, а константы C_1 , C_2 , C_3 отвечают за дополнительные нелинейные члены в определяющих соотношениях. Окончательный вид разрешающего уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{dV_0}{dV} \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v} \nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

которое после подстановки (7) или (9) соответствует моделям упругого и нелинейно-упругого материала.

2.3. Процедура численного решения.

Для численного решения краевых задач (2)-(4), (7), (9)-(10) используется метод конечных элементов, позволяющий перейти от вариационной проблемы (2)-(4), (7), (9)-(10) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых скоростей. Развитие процесса во времени аппроксимируется с помощью метода пошагового нагружения, разбивающего параметр процесса на конечные отрезки. В начальный момент времени напряжения отсутствуют. Затем образец подвергается осесимметричному воздействию со стороны абсолютно жесткого штампа, форма которого определяется кусочно-гладкой кривой $f(\xi)$, где ξ – монотонный параметр. Учет изменения зоны контакта отслеживается на каждом шаге нагружения вместе с выполнением неравенства $f(\mathbf{x}) > 0$ – условия взаимного непроникновения упругого образца и жесткого штампа, где $\mathbf{x} \in V$. Вводится полоса скольжения достаточно малой ширины ε , при попадании в которую точка границы считается скользящей по образующей штампа при условии неотрицательности действующей со стороны штампа реакции связи. Перемещения контактных узловых точек находятся путем интегрирования скоростей вдоль образующей в предположении достаточной малости изменения кривизны функции $f(\xi)$ за один шаг. Сходимость решения достигается измельчением конечноэлементной сетки вблизи области с предполагаемой большой интенсивностью деформаций и исследовался с использованием метода сгущающихся сеток.

3. Определение констант материала из опыта на сжатие.

Рассматриваемые в рамках данной работы натуральные каучуки с малым объемным содержанием примесей можно отнести к классу несжимаемых материалов. В этом случае идентификация материала сводится к определению констант G и C_3 в соотношениях (9). Была произведена серия опытов с образцами, имеющими форму прямоугольного параллелепипеда размером 20x5x5мм. Напряженное состояние приблизительно считалось однородным и описывалось следующими полями напряжений и деформаций: $\Sigma_R^1 = P$, $\Sigma_R^2 = \Sigma_R^3 = 0$, $\Gamma_1 = \ln(\lambda)$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{2} \ln(\lambda)$. Воспользовавшись соотношением (8), получим связь между истинным напряжением S_{11} и кратностью удлинения λ для нелинейной модели Генки:

$$S_{11} = 3G \ln(\lambda) + \frac{3}{4} C_3 \ln(\lambda)^2 \quad (11)$$

В результате были определены следующие значения констант: $G = 5.7 \cdot 10^5$ Па, $C_3 = -2.5 \cdot 10^6$ Па. Красная кривая на графике соответствует частному случаю (11), когда $C_3 = 0$, то есть линейной модели Генки. Константы G и C_3 определены так, что соотношения (11) наилучшим образом в смысле среднеквадратичного аппроксимируют экспериментальную кривую.

3.1. Верификация численной модели в опыте по индентированию.

Схема нагружения соответствует осесимметричному вдавливанию гладкого стального сферического штампа в прямоугольную пластину. На рисунке 2 точками представлены экспериментальные данные, полученные в серии опытов по индентированию каучуковых образцов 50x50x12мм сферической головкой радиусом $R = 3$ мм, в виде зависимости величины действующей силы P , приложенной к штампу, от глубины внедрения D . Численное решение задачи было осуществлено по определяющим соотношениям (7) и (9) в предположении слабой сжимаемости материала и с использованием описанных выше вычислительных процедур. В моделях были использованы значения упругих констант, определенные из опытов на сжатие.

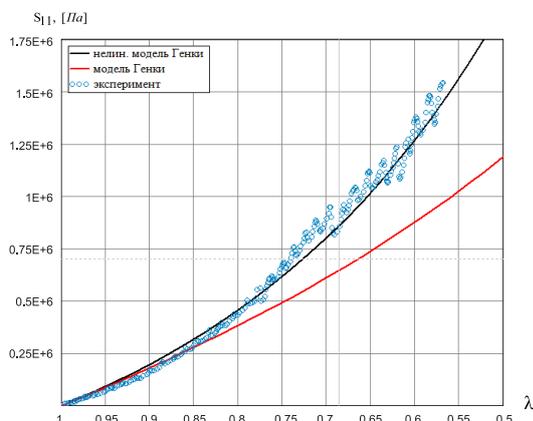


Рисунок 1. Зависимость осевого усилия от кратности удлинения в опыте на сжатие.

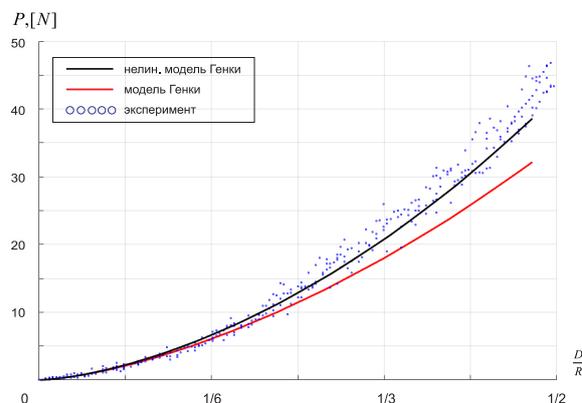


Рисунок 2. Зависимость главного вектора действующей нагрузки от величины относительной осадки.

Красная кривая на рисунке 2 соответствуют численному решению для материала Генки (7), а черной кривой соответствует решение с использованием определяющих соотношений (9). Из графиков видно, что зависимости, полученные в статье с использованием физически-нелинейной постановки (8), вносят существенные поправки к линейному решению для больших деформаций и в лучшей степени описывают экспериментальные данные.

4. Выводы

В статье предложен вариант физически нелинейной модели Генки и его частный случай для несжимаемых и слабосжимаемых материалов. Разработана установка, и проведена серия экспериментов на сжатие призматических образцов из каучука с целью определения констант модели. Сравнение результатов численного моделирования процесса индентирования каучуковых образцов сферическим индентором с данными экспериментов показало, что модели этого процесса, построенные с применением соотношений Генки, достаточно хорошо описывают кривую индентирования до деформаций порядка 30%. При деформациях, превышающих 30%, экспериментальные данные наилучшим образом описываются моделью с использованием предложенных физически нелинейных соотношений. По сравнению с вкладом, вносимым нелинейными слагаемыми, учет контактного трения вносит незначительные погрешности в определение упругих констант.

5. Литература

- [1] Адамов, А.А. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеев, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. - Екатеринбург: УрО РАН, 2003. - 412 с.
- [2] Бровко, Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. - М.: Наука, 2017. - 432 с.
- [3] Маркин, А.А. Термомеханика упругопластического деформирования / А.А. Маркин, М.Ю. Соколова. - М.: Физматлит, 2013. - 320 с.
- [4] Труделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. - М.: Мир, 1975. - 592 с.
- [5] Ding, Y. On the determination of elastic moduli of cells by AFM based indentation / Y. Ding, G.-K. Xu, G.-F. Wang // Scientific Reports. - 2017. - Vol. 7. - P. 8.

- [6] Giannakopoulos, A.E. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials / A.E. Giannakopoulos, A. Triantafyllou // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. - 2007. - Vol. 55. - P. 1196-1211.
- [7] Hill, R. On constitutive inequalities for simple materials II // J. Mech. Phys. Solids. - 1968. - Vol. 16(4). - P. 229-242.
- [8] Jang, J.-W. Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis / J.-W. Jang, H.-K. Kim, S.-B. Lee // International Journal of Solids and Structures. - 2016. - Vol. 82. - P. 39-46.
- [9] Williams, J.G. Using the simple compression test to determine Young's modulus, Poisson's ratio and the Coulomb friction coefficient / J.G. Williams, C. Gomonpilas // International Journal of Solids and Structures. - 2008. - Vol. 45. - P. 4448-4459.
- [10] Xiao, H. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems / H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers // Acta mechanica. - 2005. - Vol. 176. - Vol. 3-4. - P. 135-151.
- [11] Zhang, M.G. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials / M.G. Zhang, Y.P. Cao, G.Y. Li, X.Q. Feng // Biomech Model Mechanobiol. - 2014. - Vol. 13. - P. 1-11.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-31-20053 мол_а_вед).

The numerical modeling of indentation process for hyperelastic solids

Yu.V. Astapov¹

¹Tula State University, Lenin pr. 92, Tula, Russia, 300012

Abstract. The process of indentation of weakly compressible elastic materials is considered. The variant of nonlinear constitutive relations is used which is the generalization of commonly known Hencky model. The values of elastic constants in proposed model are determined from the series of tests. The algorithm to take into account contact boundary conditions was numerically developed. Proposed model was verified based on the indentation test data.