Численное моделирование двумерных течений вязкой теплопроводной жидкости в нерегулярных областях

В.П. Сироченко[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Для решения двумерных задач динамики вязкой теплопроводной жидкости в сложных областях предложен приближенный метод на основе метода фиктивных областей. Представлены результаты расчетов стационарных и нестационарных течений.

1. Введение

Для решения многих прикладных задач в нерегулярных областях широко применяется метод фиктивных областей, отличающийся высокой степенью автоматизации программирования. Основная идея метода фиктивных областей состоит в том, чтобы решать задачу не в исходной сложной области D_0, а в некоторой другой, более простой области D, причем $D_0 \subset D$. В качестве D можно выбрать n -мерный параллелепипед. Это позволяет создавать программное обеспечение сразу для достаточно широкого класса задач с произвольными расчетными областями.

Возможности применения метода фиктивных областей к задачам гидродинамики в переменных «скорость, давление», «функция тока, завихренность» рассмотрены во многих работах. В данной работе метод фиктивных областей применяется для приближенного решения задач вязкой теплопроводной жидкости в переменных «скорость, завихренность, температура» в сложных областях.

2. Постановка задачи. Метод фиктивных областей

При моделировании течений вязкой жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности, часто используют систему уравнений для конвекции и теплообмена в приближении Буссинеска, которая выводится из общих уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в предположении, что жидкость динамически и статически несжимаема, т.е. плотность ее не зависит от давления, но может зависеть от температуры.

При этих предположениях движение жидкости в поле тяжести вследствие неравномерного распределения температуры в ограниченной области D_0 с границей ∂D_0 описывается уравнениями [1]:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{\upsilon} - \beta\vec{g}\theta, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{\upsilon} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{\upsilon}\cdot\nabla\theta=\chi\Delta\theta,\qquad x\in D_0,\qquad t\in(0,T].\qquad(3)$$

В этой системе $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости, p и θ – отклонения давления и температуры от их статических значений. Параметрами являются плотность ρ, коэффициенты кинематической вязкости ν, температуропроводности χ, а также ускорение свободного падения g и коэффициент теплового изменения плотности β.

К уравнениям (1)-(3) добавляются начальные и граничные условия для скорости и температуры.

При моделировании плоских течений используются другие переменные: функция тока, завихренность [2]. Эквивалентность различных постановок задач гидродинамики в двумерном случае, в том числе для многосвязных областей, доказана в [3].

Рассмотрим математическую задачу о нестационарном движении вязкой теплопроводной жидкости в переменных «скорость, завихренность, температура» в односвязной двумерной области. В ограниченной области D_0 с границей ∂D_0 требуется определить компоненты скорости u, v, завихренность ω и температуру θ из системы уравнений:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=\nu\Delta\omega+\beta g\frac{\partial\theta}{\partial x},\qquad(4)$$

$$\Delta u=-\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad(5)$$

$$\Delta v=\frac{\partial\omega}{\partial x},\qquad(6)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\theta)+\frac{\partial}{\partial y}(v\theta)=\chi\Delta\theta,\quad (x,y)\in D_0,\quad t\in(0,T],\qquad(7)$$

при начальных:

$$\omega=\alpha(x,y),\qquad \theta=\zeta(x,y),\qquad (x,y)\in\overline{D}_0,\quad t=0,\qquad(8)$$

и граничных условиях:

$$u=U(x,y,t),\quad v=V(x,y,t),\quad \omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \theta=\Phi(x,y,t),$$
$$(x,y)\in\partial D_0,\qquad t\in(0,T].\qquad(9)$$

Для решения задач гидродинамики в сложных областях применяется метод фиктивных областей. В [4,5] дано теоретическое обоснование метода фиктивных областей для задач динамики вязкой жидкости в переменных «скорость, давление», «функция тока, завихренность».

Для приближенного решения задачи (4)-(9) в нерегулярной области D_0 применим метод фиктивных областей в варианте с продолжением по младшим коэффициентам [4]. Следуя общей идее метода, дополним D_0 фиктивной областью D_1 до прямоугольной области D.

В расширенной области D рассмотрим вспомогательную задачу метода фиктивных областей с малым положительным параметром ε для приближенного решения $u^\varepsilon, v^\varepsilon, \omega^\varepsilon, \theta^\varepsilon$:

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon\omega^\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(v^\varepsilon\omega^\varepsilon)=\nu\left[\Delta\omega^\varepsilon-c^\varepsilon\left(\omega^\varepsilon-\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}\right)\right]+\beta g\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x},\qquad(10)$$

$$\Delta u^\varepsilon-c^\varepsilon(u^\varepsilon-U)=-\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial y},\qquad(11)$$

$$\Delta v^{\varepsilon} - c^{\varepsilon}(v^{\varepsilon} - V) = \frac{\partial \omega^{\varepsilon}}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial y}(v^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}) = \chi\left[\Delta\theta^{\varepsilon} - c^{\varepsilon}\left(\theta^{\varepsilon} - \Phi\right)\right], \quad (x,y) \in D, \quad t \in (0,T], \tag{13}$$

$$\omega^{\varepsilon} = \alpha^{\varepsilon}(x,y), \quad \theta^{\varepsilon} = \zeta^{\varepsilon}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad t = 0, \tag{14}$$

$$u^{\varepsilon} = U(x,y,t), \quad v^{\varepsilon} = V(x,y,t), \quad \omega^{\varepsilon} = \frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial y}, \quad \theta^{\varepsilon} = \Phi(x,y,t),$$
$$(x,y) \in \partial D, \quad t \in (0,T], \tag{15}$$

где

$$c^{\varepsilon}(x,y), \alpha^{\varepsilon}(x,y), \zeta^{\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} 0, & \alpha(x,y), \ \zeta(x,y), \ (x,y) \in D_0, \\ 1/\varepsilon^2, & 0, \quad 0, \quad (x,y) \in D_1. \end{cases} \tag{16}$$

Функции $U(x,y,t)$, $V(x,y,t)$, $\Phi(x,y,t)$ гладким образом продолжаются в фиктивную область D_1.

Качественный анализ вспомогательной задачи метода фиктивных областей (10)-(16) показывает, что ее решение $u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}, \omega^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}$ приближенно удовлетворяет всем соотношениям исходной задачи (4)-(9) в области D_0, и, следовательно, может быть принято в качестве приближенного решения задачи (4)-(9) при достаточно малых значениях параметра продолжения ε.

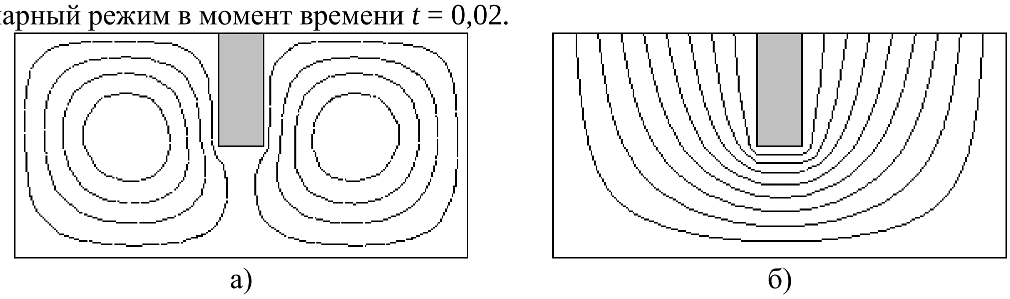
3. Численное моделирование течений вязкой теплопроводной жидкости в областях со сложной границей

Во вспомогательной задаче метода фиктивных областей (10)-(16) перейдем к безразмерным переменным. Полученная задача в безразмерных переменных характеризуется параметрами: числом Рейнольдса *Re*, числом Грасгофа *Gr*, числом Прандтля *Pr*.

Для численного решения вспомогательной задачи в безразмерных переменных разработана итерационная конечно-разностным схема. Проведены расчеты стационарной и нестационарной конвекции в полости с внутренним блоком при числе Рейнольдса *Re* = 10, числе Прандтля *Pr* = 1 и различных числах Грасгофа *Gr*. Граничные условия для температуры задавались следующим образом: $\theta = 0$ на внешней границе полости, $\theta = 1$ на границе блока. Компоненты скорости на всех границах *u* = *v* = 0. Во всех расчетах параметр продолжения метода фиктивных областей $\varepsilon = 10^{-5}$.

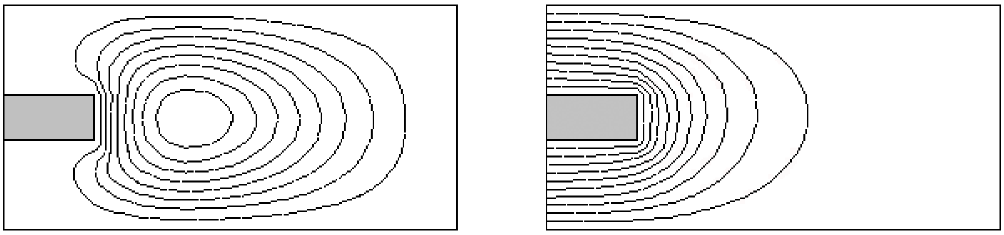
На рисунках 1–3 изображены линии тока и изотермы стационарных течений при различных конфигурациях полости и числах Грасгофа *Gr*.

При решении нестационарных задач конвекции вычисления проводились с шагом по времени τ = 0,001 и заканчивались при значении безразмерного времени *t* = 0,1. На рисунке 4 изображены последовательные стадии развития течения при *Gr* = 50. Течение в полости выходит на стационарный режим в момент времени *t* = 0,02.



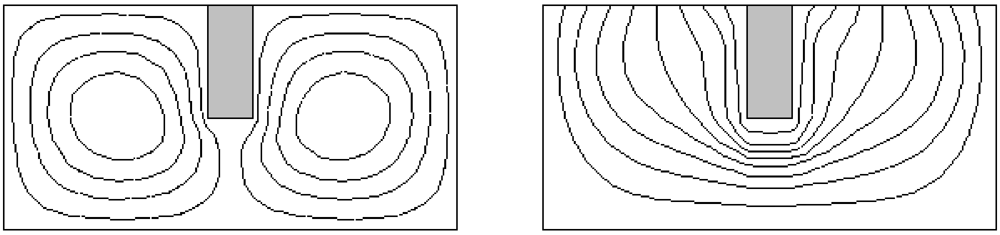
а) б)

Рисунок 1. Стационарная конвекция в полости с внутренним блоком при *Gr* = 50:
(а) – линии тока; (б) – изотермы.



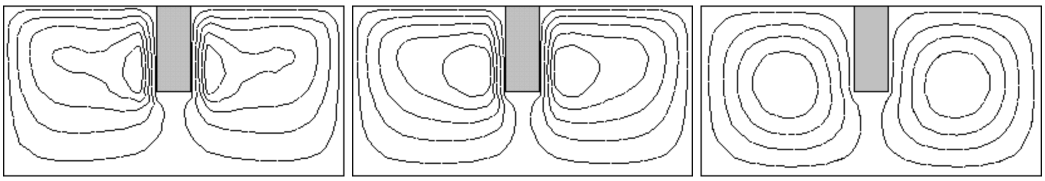
а) б)

Рисунок 2. Стационарная конвекция в полости с внутренним блоком при $Gr = 500$: (а) – линии тока; (б) – изотермы.



а) б)

Рисунок 3. Стационарная конвекция в полости с внутренним блоком при $Gr =$ 5000: (а) – линии тока; (б) – изотермы.



а) б) с)

Рисунок 4. Нестационарная конвекция при $Gr = 50$: (а) – $t = 0{,}001$; (б) – $t = 0{,}005$; (с) – $t = 0{,}02$.

4. Заключение

Для приближенного решения двумерных задач динамики вязкой теплопроводной жидкости в переменных «скорость, завихренность, температура» в нерегулярных областях применен метод фиктивных областей. Получены результаты численного моделирования конкретных течений жидкости в областях со сложными границами. Проведенные исследования показали эффективность и технологичность разработанного метода для численного моделирования течений вязкой теплопроводной жидкости в сложных областях.

5. Литература

[1] Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. – Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

[2] Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.

[3] Кузнецов, Б.Г. О постановке задач гидродинамики в многосвязных областях / Б.Г. Кузнецов, В.П. Сироченко // Вычислительные технологии: Сб. научн. трудов. – Новосибирск, ИВТ СО РАН. – 1995. – Т. 4, № 12. – С. 209-218.

[4] Вабищевич, П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство Моск. ун-та, 1991. – 156 с.

[5] Смагулов, Ш. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях / Ш. Смагулов, В.П. Сироченко, М.К. Орунханов. – Алматы: Издательство Казахского национального университета им. аль-Фараби, 2001. – 276 с.

Numerical simulation of two-dimensional viscous heat-conducting fluid flows in irregular regions

V.P. Sirochenko[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. An approximate method based on the method of fictitious regions is proposed to solve two-dimensional problems of viscous heat-conducting fluid dynamics in complex areas. The results of calculations of stationary and unsteady flows are presented.