# Численно устойчивый алгоритм идентификации линейных динамических систем методом расширенных инструментальных переменных

**Д.В. Иванов[1], А.И. Жданов[2]**

[1]Самарский государственный университет путей сообщения, Свободы 2В, Самара, Россия, 443066
[2]Самарский государственный технический университет, Молодогвардейская 244, Самара, Россия, 443100

**Аннотация.** Инструментальные переменные широко применяются для идентификации линейных динамических систем. К достоинствам инструментальных переменных относятся малая вычислительная сложность, а также возможность идентификации для различных моделей цветных шумов. Часто метод инструментальных переменных приводит к плохо обусловленным задачам, что существенно ограничивает область его применения. В работе предложено решение задачи расширенных инструментальных переменных на основе расширенной систему уравнений эквивалентной нормальной системе уравнений. Тестовые примеры показали высокую точность предложенного подхода.

## 1. Введение

Метод инструментальных переменных широко применяется для решения задач идентификации динамических систем [1-3]. Различный выбор инструментальных переменных позволяет решать задачи идентификации для моделей выходной ошибки, ARMAX моделей, ARARX моделей, BJ моделей [1-3], а также для моделей с ошибками в переменных [4,5]. Инструментальные переменные применяются для идентификации динамических систем, описываемых уравнениями с производными и разностями дробного порядка [6,7].

К недостаткам метода инструментальных переменных следует отнести противоречивые требования к выбору инструментальной переменной: она должна быть коррелирована с регрессионным вектором и не коррелирована с помехой. Часто метод инструментальных переменных приводит к плохо обусловленным задачам, что существенно ограничивает область его применения. В работе предложено решение задачи расширенных инструментальных переменных на основе расширенной системы уравнений. Тестовые примеры показали высокую точность предложенного подхода.

## 2. Постановка задачи

Устойчивая динамическая система описывается уравнениями:

$$z_i - \sum_{m=1}^{n} b^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{n_1} a^{(m)} x_{i-m} \ . \tag{1}$$

В зависимости от параметризации и точек приложения шума, могут быть получены различные классы моделей.

1. Модель с ошибкой по уравнению,

$$z_i - \sum_{m=1}^{n} b^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{n_1} a^{(m)} x_{i-m} + \xi_i, \qquad (2)$$

а также ее обобщения ARMAX, ARARX, ARARMAX и др.

2. Модель с ошибкой по выходу

$$z_i - \sum_{m=1}^{n} b^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{n_1} a^{(m)} x_{i-m}\ ,\ y_i = z_i + \xi_i, \qquad (3)$$

а также ее обобщение модель BJ (Box-Jenkins).

3. Модель с ошибками во всех переменных

$$z_i - \sum_{m=1}^{n} b^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{n_1} a^{(m)} x_{i-m}\ ,\ y_i = z_i + \xi_i,\ w_i = x_i + \zeta_i. \qquad (4)$$

Также возможны различные комбинации данных моделей или шум может быть дробным [8]. Представим модели (2) -(4) в виде линейной регрессии

$$y_i = \varphi_i^T \theta + \varepsilon_i, \qquad (5)$$

где $\theta = \left(b^{(1)},...,b^{(n)} \mid a^{(0)},...,a^{(n_1)}\right)^T \in \mathbb{R}^{n+n_1+1}$;

$\varphi_i = \left(z_{i-1},\dots,z_{i-n} \mid x_i,\dots,x_{i-n_1}\right)^T \in \mathbb{R}^{n+n_1+1}$ для модели (2);

$\varphi_i = \left(y_{i-1},\dots,y_{i-n} \mid x_i,\dots,x_{i-n_1}\right)^T \in \mathbb{R}^{n+n_1+1}$ для модели (3);

$\varphi_i = \left(y_{i-1},\dots,y_{i-n} \mid w_i,\dots,w_{i-n_1}\right)^T \in \mathbb{R}^{n+n_1+1}$ для модели (4);

$\{\varepsilon_i\}$ последовательность случайных величин с $\mathrm{E}\{\varepsilon_i\} = 0,\ E\{\varepsilon_i^2\} = \sigma_\varepsilon^2 > 0,$ где Е - оператор математического ожидания.

Требуется оценивать вектор параметров $\hat{\theta}$ из уравнения (5) по наблюдаемым данным $\{\varphi_i\}, \{y_i\}$.

### 3. Алгоритмы идентификации

Предположим, что существует вектор $\psi_i$ такой, что:

- $\psi_i$ не коррелирован с шумом $\varepsilon_i$;
- $\psi_i$ хорошо коррелирован с регрессором $\varphi_i$.

Если размерности регрессионного вектора и вектора инструментальных переменных равны

$$\mathrm{n}_\psi = \dim \psi_i = \dim \varphi_i = n + n_1 + 1,$$

тогда оценка $\hat{\theta}_{IV}$ инструментальных переменных может быть найдена из решения системы уравнений:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i \varphi_i^T\right)\theta = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i y_i\right) \Leftrightarrow \hat{R}_{\psi\varphi}\theta = \hat{r}_{\psi y}, \qquad (6)$$

где $\hat{R}_{\psi\varphi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i \varphi_i^T$, $\hat{r}_{\psi y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i y_i$.

В [9] предложено решение системы уравнений (6) на основе расширенной эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений:

$$C\Theta_{AIV} = d, \qquad (7)$$

где $C = \begin{pmatrix} k_1 E & \Phi \\ \Psi^T & 0 \end{pmatrix}$, $\Theta_{AIV} = \begin{pmatrix} k_1^{-1} r \\ \theta \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{pmatrix}$, $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^T \\ \vdots \\ \psi_N^T \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$, $k_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\min}}{2}}$,

$\mu_{\min}$ - минимальное собственное число матрицы $\hat{R}_{\psi\varphi}$.

Нижняя граница обусловленности системы (7) определяется неравенством:

$$cond_2(C) \geq 1/2 + \sqrt{1/4 + 2cond_2(R_{\psi\varphi})}.$$

Несмотря на снижение числа обусловленности, решение системы (7) часто дает неудовлетворительные оценки. Это связано с тем, что в качестве коэффициентов используются оценки ковариаций. На коротких выборках метод инструментальных переменных может давать большую погрешность. Для улучшения точности оценок размерность вектора инструментальных переменных берется больше размерности регрессионного вектора $n_\psi = \dim \psi_i > n + n_1 + 1$.

Данная модификация получила название расширенного метода инструментальных переменных [1, 2]. Оценка $\hat{\theta}_{EIV}$ может быть найдена из выражения:

$$\hat{\theta}_{EIV} = \arg\min_{\theta} \left\| \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi_i \varphi_i^T \right) \theta - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi_i y_i \right) \right\|_2^2. \quad (8)$$

Минимум выражения (8) является решением системы нормальных уравнений

$$\hat{\theta}_{EIV} = \left( \hat{R}_{\psi\varphi}^T \hat{R}_{\psi\varphi} \right)^{-1} \hat{R}_{\psi\varphi}^T \hat{r}_{\psi y}, \quad (9)$$

где $\hat{R}_{\psi\varphi}$ - прямоугольная матрица размерности $n_\psi \times (n + n_1 + 1)$.

Обусловленность системы уравнений (9) выше, чем системы уравнений (6). Для снижения обусловленности, система (9) может быть представлена в виде расширенной эквивалентной системы уравнений:

$$\tilde{C} \Theta_{AEIV} = \tilde{d}, \quad (10)$$

где $\tilde{C} = \begin{pmatrix} k_2 I & \hat{R}_{\psi\varphi} \\ \hat{R}_{\psi\varphi}^T & 0 \end{pmatrix}$, $\Theta_{AEIV} = \begin{pmatrix} k_2^{-1} r \\ \theta \end{pmatrix}$, $\tilde{d} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{\psi y} \\ 0 \end{pmatrix}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{\mu_{\min}}$.

Обусловленность (10) и выбор оптимального множителя $k_2$ рассмотрены в [10], и определяется выражением:

$$cond_2(\tilde{C}) = 1/2 + \sqrt{1/4 + 2cond_2(R_{\psi\varphi}^T R_{\psi\varphi}^T)}.$$

Таким образом, система (10) имеет меньшее число обусловленности по сравнению с (9) и, как правило, погрешности в оценках ковариаций меньше чем в (8).

## 4. Тестовый пример

Динамическая система описывается уравнением:

$$y_i = A_1 e^{-b_1 t_i} + A_2 e^{-b_2 t_i} + \xi_i, \quad (11)$$

Параметры $b_1, b_2$ входят в уравнение (11) нелинейно, что осложняет процедуру идентификации. С помощью Z-преобразования [11] представим уравнение (11) в виде разностного уравнения линейного по параметрам с ошибкой в выходном сигнале:

$$z_i = c_1 z_{i-1} + c_2 z_{i-2} + d_1 \delta_{i-1} - d_2 \delta_{i-2}, \quad (12)$$

$$y_i = z_i + \xi_i,$$

где $c_1 = \exp(-b_1 \cdot \Delta t) + \exp(-b_2 \cdot \Delta t)$, $c_2 = \exp(-b_1 \cdot \Delta t) \cdot \exp(-b_2 \cdot \Delta t)$, $d_1 = A_1 + A_2$. и $d_2 = A_1 \exp(-b_1 \cdot \Delta t) + A_2 \exp(-b_2 \cdot \Delta t)$, $\delta_i$ -дельта функция.

Для $i > 2$ уравнение (12) примет вид:

$$z_i = c_1 z_{i-1} + c_2 z_{i-2},\ y_i = z_i + \xi_i. \tag{13}$$

Для оценивания коэффициентов $c_1, c_2$ (13) не может быть применен метод наименьших квадратов, так как обобщенная ошибка не является белым шумом:

$$\varepsilon_i = y_i - c_1 y_{i-1} - c_2 y_{i-2} = \xi_i - c_1 \xi_{i-1} - c_2 \xi_{i-2}.$$

Протестируем рассматриваемые в статье алгоритмы на примере динамической системы, описываемой уравнением:

$$y_i = 4\mathrm{e}^{-t_i} + 10\,\mathrm{e}^{-0.999 t_i} + \xi_i, \tag{14}$$

Число наблюдений равно $N = 40$. Интервал дискретизации $\Delta t = 0.2$.

Для $i > 2$ разностное уравнение, соответствующее уравнению (14) примет вид:

$$\begin{gathered} z_i = 1.637625268682286 z_{i-1} + 0.670454123452141 z_{i-2}, \\ y_i = z_i + \xi_i. \end{gathered} \tag{15}$$

Выбор вектора инструментальных переменных:

1. для простых инструментальных переменных (6), (7)
$$\psi_i = \left(y_{i-3}, y_{i-4}\right)^T \in \mathbb{R}^2,$$
2. для расширенных инструментальных переменных (9), (10)
$$\psi_i = \left(y_{i-3}, \ldots, y_{i-N}\right)^T \in \mathbb{R}^{N-2}.$$

В качестве показателя качества модели использовалась относительная среднеквадратическая погрешность оценивания параметров уравнения (14):

$$\delta c = \sqrt{\frac{\left\|\hat{c} - c\right\|^2}{\left\|c\right\|^2}} \cdot 100\%.$$

В таблице 1 приведены обусловленности и погрешности оценивания параметров по формулам (6), (7), (9), (10) для гауссовского независимого шума с среднеквадратическим отклонением $\sigma_\xi = 10^{-8}$.

**Таблица 1.** Результаты идентификации.

| **Метод идентификации** | *cond*$_2$ | $\delta\theta$ ,% |
|---|---|---|
| Простые ИП (6) | 5.4185e+08 | 13.66 |
| Простые ИП с расширенной матрицей (7) | 3.2920e+04 | 13.66 |
| Расширенные ИП (9) | 7.11502e+15 | 95.61 |
| Расширенные ИП с расширенной матрицей (10) | 1.1928e+08 | 0.12 |

## 5. Заключение

Результаты тестового примера показывают, что предложенная модификация инструментальных переменных на основе расширенной эквивалентной системы (10) позволяет значительно повысить точность оценивания параметров системы.

## 6. Литература

[1] Söderström, T. System Identification / T. Söderström, P. Stoica – NJ: Prentice-Hall, 1988. – 612 p.
[2] Söderström, T. Instrumental Variable. Methods for System Identification / T. Söderström, P. Stoica – Berlin: Springer, 1983.
[3] Young, P.C. Recursive Estimation and Time-Series Analysis – Berlin: Springer-Verlag, 2011. – 504 p.
[4] Söderström, T. On instrumental variable and total least squares approaches for identification of noisy systems / T. Söderström, K. Mahata // International Journal of Control. – 2002. – Vol. 75(6). – P. 381-389. DOI: 10.1080/00207170110112278.

[5] Thil, S. On instrumental variable-based methods for errors-in-variables model identification / S. Thil, M. Gilson, H. Garnier // IFAC Proceedings Volumes. – 2008. – Vol. 41(2). – P. 426-431. DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00072.

[6] Malti, R. An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification / R. Malti, S. Victor, A. Oustaloup, H. Garnier // IFAC Proceedings. – 2008. – Vol. 41(2). – P. 14379-14384. DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.02436.

[7] Ivanov, D.V. Identification of fractional linear dynamical systems with autocorrelated errors in variables by generalized instrumental variables / D.V. Ivanov, I.L. Sandler, E.V. Kozlov // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51(32). – P. 580-584. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.485.

[8] Ivanov, D.V. Identification Fractional Linear Dynamic Systems with fractional errors-in-variables / D.V. Ivanov, A.V. Ivanov // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 803. – P. 012058. DOI: 10.1088/1742-6596/803/1/012058.

[9] Жданов, А.И. Решение плохо обусловленных задач идентификации линейных динамических систем методом инструментальных переменных / А.И. Жданов, С.Ю. Гоголева // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2001. – Т. 3, № 1. – С. 128-130.

[10] Björck, Å. Iterative refinement of linear least squares solutions I // BIT Numerical Mathematics. – 1967. – Vol. 7. – P. 257-278. DOI: 10.1007/BF01939321.

[11] Refaat, E.A. Lecture notes on Z-Transform – Lulu Press, Morrisville NC, 2005.

# Numerically stable algorithm for identification of linear dynamical systems by extended instrumental variables

**D.V. Ivanov[1], A.I. Zhdanov[2]**

[1]Samara State University of Transport, Svobody 2B, Samara, Russia, 443066
[2]Samara State Technical University, Molodogvardejskaya 244, Samara, Russia, 443100

**Abstract.** Instrumental variables are widely used to identify linear dynamical systems. The advantages of instrumental variables include low computational complexity, as well as the possibility of identification for different models of color noise. Often the method of instrumental variables leads to ill-conditioned problems, which significantly limits the application of this method. The paper proposes a solution to the problem of extended instrumental variables based on augmented normal equations. Test examples showed high accuracy of the proposed approach.