

ЧИСЛЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННОГО СЛОЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В.Е. Зотеев, А.А. Свистунова
Самарский государственный технический университет

Предлагается новый численный метод определения параметров напряженного состояния поверхностно упрочненного слоя цилиндрического изделия на основе экспериментальных данных. В основе этого метода лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента для компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца после поверхностного пластического деформирования.

При расчете и исследовании полей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно-упрочненном цилиндрическом изделии одной из основных задач является задача достоверной оценки параметров аппроксимации экспериментальных зависимостей остаточных напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$. Эта зависимость от глубины r упрочненного слоя цилиндрического образца, как правило, описывается аналитической функцией вида

$$\sigma_{\theta}^{res}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp[-\alpha(a-r)^2] \quad (1)$$

где σ_0 , σ_1 и b – параметры, подлежащие определению [1]. Известный подход к решению этой задачи не предполагает в своих алгоритмах применения статистических методов обработки результатов эксперимента [1]. Он, как правило, использует информацию о двух, специальным образом выбранных, точках кривой (1) и дополнительное условие, связывающее её параметры. При этом практически все точки эксперимента в вычислениях параметров зависимости (1) не участвуют, что является существенным недостатком такого метода.

Предлагается новый численный метод определения на основе экспериментальных данных параметров напряженного состояния поверхностно упрочненного слоя цилиндрического изделия. В основе метода лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента для компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца после процедуры поверхностного пластического деформирования. Алгоритм этого метода включает следующие основные этапы [2]:

- построение рекуррентной формулы, связывающей несколько последовательных дискретных значений зависимости (1) компоненты напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$;
- разработка разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений и учитывающих случайный разброс в данных эксперимента;
- формирование на основе разностных уравнений обобщенной регрессионной модели, коэффициенты которой известным образом связаны с параметрами исследуемой зависимости (1);
- среднеквадратичное оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели, в основе которого лежит минимизация суммы квадратов отклонений модели (1) от результатов наблюдений по всем точкам эксперимента;
- вычисление параметров компоненты остаточных напряжений, возникающих в упрочненном слое цилиндрического образца;
- оценка погрешности результатов вычислений, а также адекватности построенной модели результатам эксперимента.

В соответствии с методикой, изложенной в [2], построена система разностных уравнений при отсутствии ограничений, описывающая результаты эксперимента для компоненты напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$, и лежащая в основе численного метода параметрической идентификации напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_1(1 - \sqrt{\lambda_2^{(i)}}) + \lambda_3\sqrt{\lambda_2^{(i)}} + \varepsilon_1, \\ y_{k-2}y_k = \lambda_1(y_{k-2} + y_k - \lambda_1^{(i)}) + \lambda_2(y_{k-1}^2 - 2\lambda_1y_{k-1} + \lambda_2^{(i)2}) + \eta_k, \\ \eta_k = \varepsilon_k(y_{k-2} - \lambda_1) + 2\lambda_2\varepsilon_{k-1}(\lambda_1^{(i)} - y_{k-1}) + \varepsilon_{k-2}(y_k - \lambda_1), \end{cases} \quad (2)$$

$$k = 2, N-1.$$

где $y_k = \sigma_{\theta}^{res}(k\Delta r)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, – результаты эксперимента, Δr – шаг дискретизации зависимости (1); N – объем выборки результатов наблюдений; ε_k – случайный разброс в данных эксперимента;

$$\lambda_1 = \sigma_0, \lambda_2 = \exp[-2\alpha\tau^2], \lambda_3 = \sigma_0 - \sigma_1 \quad (3)$$

Формулы (3) позволяют по найденным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения (2) вычислить σ_0 , σ_1 и α модели (1).

Если использовать условие, что твердого тела, эпюра напряжения $\sigma_{\theta}^{res}(r)$ должна быть самоуравновешенной, т.е. должно выполняться условие

$$\int_0^a \sigma_{\theta}^{res}(r) dr = 0 \quad (3)$$

то система разностных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2a}\sqrt{-\ln \lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erf}\left(\frac{a\sqrt{-\ln \lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{2\tau}}\right)} \right) + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2a}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{-\ln \lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erf}\left(\frac{a\sqrt{-\ln \lambda_2^{(i)}}}{\sqrt{2\tau}}\right)} \right) + \varepsilon_1, \\ y_{k-2}y_k = \lambda_1(y_{k-2} + y_k - \lambda_1^{(i)}) + \lambda_2(y_{k-1}^2 - 2\lambda_1y_{k-1} + \lambda_2^{(i)2}) + \eta_k, \\ \eta_k = \varepsilon_k(y_{k-2} - \lambda_1) + 2\lambda_2\varepsilon_{k-1}(\lambda_1^{(i)} - y_{k-1}) + \varepsilon_{k-2}(y_k - \lambda_1), \quad k = 2, N-1. \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_1 = \sigma_0, \lambda_2 = \exp[-2\alpha\tau^2], \sigma_0 = \sigma_1 \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(a\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha a}}. \quad (5)$$

Формулы (6) позволяют по найденным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения (5) вычислить параметры σ_0 , σ_1 и α модели (1).

При обработке результатов эксперимента при исследовании остаточных напряжений, как правило, бывает, известна величина x_0 , при которой $\sigma_{\theta}^{res}(x_0)dr = 0$. Тогда с учетом этого условия получаем соотношение:

$$\exp[-\alpha x_0^2] = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(a\sqrt{\alpha})}{2a\sqrt{\alpha}}. \quad (6)$$

Используя формулу простых итераций, получим численное решение для параметра α :

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + c \left(2a\sqrt{\alpha^{(k)}} e^{-\alpha^{(k)} x_0^2} - \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(a\sqrt{\alpha^{(k)}} \right) \right), \text{ где } c \approx -0.5 \div (-0.9), \alpha^{(0)} = \frac{1}{2x_0^2}.$$

Параметры σ_0 и σ_1 можно найти по формулам:

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_1 e^{-\alpha x_0^2}, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_1 \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf} (a\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha a}}$$

Для вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения (2) и (5), обеспечивающих минимум отклонения модели (1), описывающей компоненту напряжений $\sigma_\theta^{res}(r)$, от экспериментальных данных, используется

обобщенная регрессионная модель вида $\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$ где $b = (y_0, y_1, y_0 y_2, \dots, y_{N-3} y_{N-1})^T$,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1})^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T.$$

Для выполнения условия $\|\varepsilon\|^2 = \|P_\lambda^{-1}b - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2 \rightarrow \min$ алгоритм численного метода на основе обобщенной регрессионной модели использует итерационную процедуру уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_i$ коэффициентов разностного уравнения. Эта процедура может быть описана формулой:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F \right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b, \quad \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i)}} P_{\hat{\lambda}^{(i)}}^T, \quad (8)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации. Начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$ может быть найдено из условия минимизации невязки $\|\eta\|^2 \rightarrow \min$ по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b$. Достаточные условия сходимости итерационной процедуры рассматриваются и исследуются в [2].

Для проведения численно аналитического исследования эффективности численного метода определения параметров остаточных напряжений было разработано программное средство на языке С#. Используются результаты эксперимента, взятые из [3].

Был применен используемый в механике метод определения параметров остаточных напряжений, а также три разработанных алгоритма на основе разностных уравнений. Данные приведены в таблице 1.

	σ_0	σ_1	α	s^2
Известный метод	19.3	1019.3	156.25	11.4%
1 алгоритм – нет ограничений	-37.84	880.55	147.74	7.9%
2 алгоритм – условие равновесия	15.20	840.5	150.0	14.8%
3 алгоритм – условие равновесия и граничная точка	18.12	961.29	154.95	9.6%

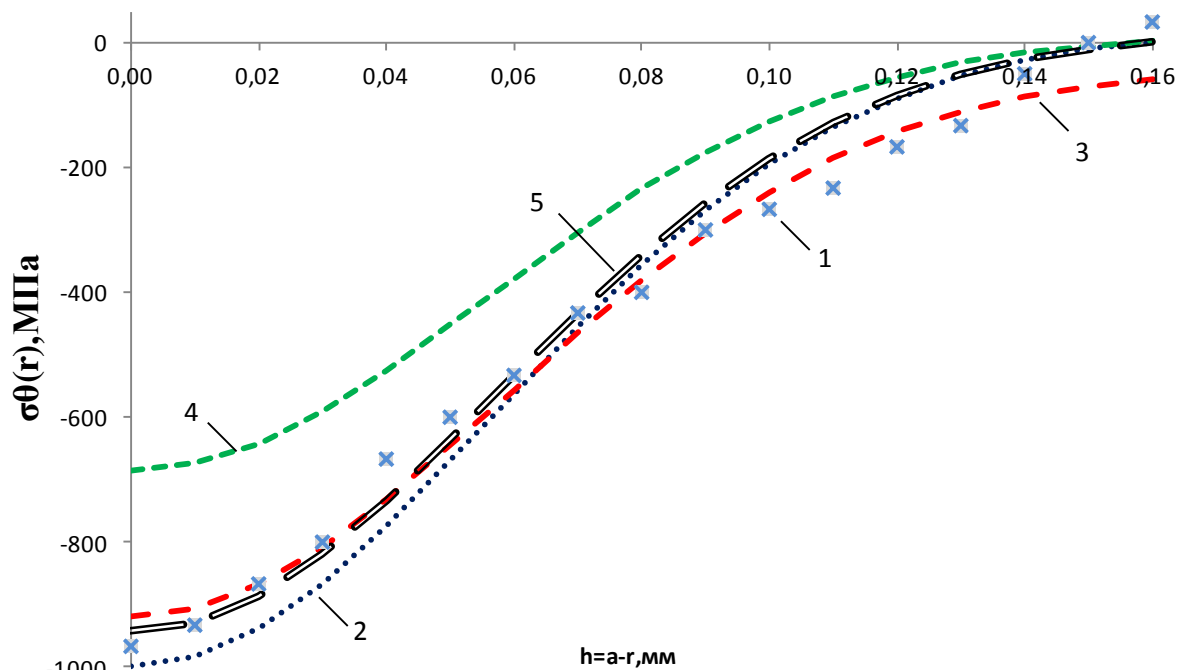


Рисунок 1 - Эпюры остаточных напряжений $\sigma_{\theta}^{res}(r)$ (сплав ЖС6 КП) в цилиндрическом образце радиуса $a = 3.76$ мм: 1 – экспериментальные данные; 2 – кривая построенная известным методом [1]; 3 – кривая, построенная по 1 алг.; 4 – кривая, построенная по 2 алг.; 5 – кривая, построенная по 3 алг.

Таким образом, применение численного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, при расчете и исследовании полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий позволяет повысить адекватность модели экспериментальным данным и, тем самым, достоверность оценок параметров напряженно деформируемого состояния.

Литература

1. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях/В. П. Радченко, М.Н. Саушкин М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.
2. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений/В. Е. Зотеев.- М.: Машиностроение, 2009.-344 с.
3. Гриневич, Е.В. Исследование полей остаточных напряжений при поверхностном упрочнении цилиндрических изделий // Прочность и долговечность элементов конструкций/Е.В. Гриневич, О.В. Колотникова – Куйбышев: КПТИ, 1983. – С. 88-97.